

DEPARTMENT OF ECONOMICS

Working Paper

UDVIKLINGSLINIER I ØKONOMETRIEN

Henning Bunzel, Bent Jesper Christensen,
Niels Haldrup, Svend Hylleberg,
Viggo Høst, Peter Jensen og
Allan Würtz

Working Paper No. 1998-15
Centre for Non-linear Modelling in Economics



ISSN 1396-2426

UNIVERSITY OF AARHUS • DENMARK

CENTRE FOR NON-LINEAR MODELLING IN ECONOMICS

DEPARTMENT OF ECONOMICS - UNIVERSITY OF AARHUS - DK - 8000 AARHUS C - DENMARK

☎ +45 89 42 11 33 - TELEFAX +45 86 13 63 34

WORKING PAPER

UDVIKLINGSLINIER I ØKONOMETRIEN

Henning Bunzel, Bent Jesper Christensen,
Niels Haldrup, Svend Hylleberg,
Viggo Høst, Peter Jensen og
Allan Würtz

Working Paper No. 1998-15

DEPARTMENT OF ECONOMICS

SCHOOL OF ECONOMICS AND MANAGEMENT - UNIVERSITY OF AARHUS - BUILDING 350

8000 AARHUS C - DENMARK ☎ +45 89 42 11 33 - TELEFAX +45 86 13 63 34

Udviklingslinier i Økonometrien

Henning Bunzel, Bent Jesper Christensen,
Niels Haldrup, Svend Hylleberg,
Viggo Høst, Peter Jensen og Allan Würtz
Institut for Økonomi og
Centre for Non-Linear Modeling in Economics
Aarhus Universitet

9. September 1998

Resumé

Recent Developments in Econometrics (In Danish) survey and assess the developments within econometric theory, microeconometrics, timeseries econometrics, finansial econometrics, and latent variables. JEL Classification C00. Keywords: Econometrics.

Indhold

1	Indledning	2
1.1	Afgrænsning	2
1.2	Indholdsbeskrivelse	4
2	Økonometrisk teori	4
2.1	Generel teori: Ekstremum estimatorer og asymptotisk teori . .	5
2.2	Anvendelse af teorien: Beregning af kovariansen	7
2.3	Misspecifikation: Pseudo ML og ikke-parametrisk estimation .	9
2.4	Bedre approksimation: Bootstrap	11
2.5	Fremtidig udvikling i økonometrisk teori	14

3	Mikroøkonometri	14
3.1	Modeller for individuelle beslutninger	16
3.2	Modeller for paneldata	20
3.3	Modeller for varighedsdata	22
3.4	Fremtidig udvikling i mikroøkonometri	24
4	Tidsserieøkonometri	25
4.1	Analyse af ikke-stationære tidsserier	25
4.2	Common features	34
4.3	Ikke-lineære modeller	35
4.4	Fremtidig udvikling i tidsserieøkonometri	38
5	Finansiel økonometri	39
5.1	Aktier	39
5.2	Obligationer og rentestruktur	46
5.3	Optioner	48
5.4	Volatilitet	50
5.5	Fremtidig udvikling i finansiel økonometri	52
6	Latente strukturmodeller	52
6.1	Den generelle LISREL-model	53
6.2	Estimation	56
6.3	Test og goodness of fit	57
6.4	Diskussion	58
6.5	Fremtidig udvikling i latente struktur modeller	59
7	Litteraturhenvisninger	59

1 Indledning

1.1 Afgrænsning

Da Econometric Society blev dannet i begyndelsen af trediverne, definerede man økonometri som et bygningsværk, baseret på tre piller: Statistik, økonomisk teori og matematik. Dette synspunkt kan vi tilslutte os, men vi vil i den følgende gennemgang af udviklingslinierne i økonometrien koncentrere os om de statistiske metoder, der har vist sig brugbare til anvendelse i empiriske

økonomiske analyser, eller som vi forudser vil finde anvendelse på dette område i fremtiden. Vi vil således ikke gennemgå udviklingen i den økonomiske teori eller i den matematiske formulerede del af denne, selvom den er både væsentlig og central. For at illustrere og motivere de økonometriske metoder vil visse dele af den økonomiske teori dog blive berørt.

Gennemgangen i det følgende vil omfatte centrale teoretiske områder, som asymptotisk teori, og metoder, der kan anvendes i tilknytning hertil, hvis stikprøvestørrelsen må betegnes som lille set i forhold til variationen i data. Endvidere vil gennemgangen omfatte metoder, der anvendes hvor data er makroøkonomiske data, individdata, finansielle data og hvor oplysninger har form af tværsnitt eller paneldata, diskrete data, censorerede data, trunke data, grupperede data, varighedsdata og tidsserier, der evt ikke er stationære.

I de senere år er man bl.a. på grund af de store teknologiske fremskridt på beregningsområdet begyndt at anvende teknikker, der kun i begrænset omfang baseres på observationer af økonomiske variable og en egentlig estimation og opstilling af en statistisk model. Her tænkes på modeller byggende på kalibreringsteknikken, som grundlag for afprøvning og anvendelse, eksempelvis *Real Business Cycle* Modeller og *Computable General Equilibrium* Modeller. Udgangspunktet for disse modeller er en mere eller mindre forfinet teoretisk model og nogle parameterværdier, der enten er gættet eller fundet i litteraturen. Den opstillede computermodel afprøves overfor de empiriske observationer ved hjælp af simulationer. Hvis modellen ikke er i stand til på tilfredsstillende måde at producere prædiktioner af de observerede serier, ændres modellens parametre, og et nyt sæt prædiktioner udarbejdes. Disse sammenlignes med de observerede værdier, og proceduren fortsættes, indtil man har opnået et tilfredsstillende fit.

Ofte er man ikke interesseret i at fitte modellens prædiktioner til selve de observerede data, men man er tilfreds, hvis de modelfrembragte prædiktioner og de observerede data har visse karakteristika til fælles. De karakteristika, man som regel sammenligner, er de første momenter, dvs. middelværdi og varians, en begrænset del af autokorrelationsstrukturen, samt korrelationerne mellem de variable. Sådanne metoder løber en risiko for at give resultater, der er helt ude af trit med de forhold, der eksisterer i økonomien, da data kun i yderst begrænset omfang spiller en rolle.

Gennemgangen i det følgende vil blive koncentreret om metoder, der er baseret på en effektiv udnyttelse af den tilgængelige information fra den økonomiske teori, fra de indsamlede data og fra målesystemet, og hvor man har en velfunderet og på forhånd fastsat kriteriefunktion for om den statistiske

model er i overensstemmelse med datainformationerne. De økonometriske metoder, vi vil gennemgå her, er således alle metoder hvor man med baggrund i den økonomiske teori har opstillet en statistisk model, der er afprøvet og tillempet således, at den beskriver det anvendte data sæt. Herefter kan hypoteser om andre økonomiske sammenhænge, der ikke er pålagt modellen som restriktioner, testes og eventuelt forkastes.

1.2 Indholdsbeskrivelse

I det følgende vil vi gennemgå udviklingen indenfor en række centrale områder af økonometrien.

I afsnit 2 gennemgår vi udviklingen indenfor den relevante og grundlæggende økonometriske/statistiske teori på området. Den generelle teori for ekstremum estimatorer behandles, inklusive maximum likelihood, pseudo maximum likelihood og generaliserede moment metoder. De vigtigste asymptotiske resultater og bootstrapmetoder beskrives. I afsnit 3 behandles udviklingen indenfor mikroøkonometrien, bl.a. modeller for individuelle beslutninger, panel data, og varighedsdata. I afsnit 4 gennemgås tidsserieøkonometrien, herunder metoder der tillader behandling af ikke stationære data og ikke-lineære sammenhænge. Afsnit 4 indeholder således en gennemgang af områderne integration, kointegration, common features og ikke-lineære modeller som Markov switching modeller. Den økonometri, der anvendes til analyse af finansielle modeller, gennemgås i afsnit 5. Afsnit 5 indeholder foruden en diskussion af modeller for aktier, obligationer og optioner også en behandling af volatilitet. I afsnit 6 behandles modeller for latente variable, eksemplificeret ved de såkaldte LISREL modeller.

2 Økonometrisk teori

Ved al empirisk arbejde konfronteres man med spørgsmålet om resultaternes troværdighed. En del af svaret til dette spørgsmål kan i økonometrien findes i egenskaberne ved den benyttede estimator. Først og fremmest drejer det sig om at finde fordelingen af estimatoren. Men det er ofte i praksis umuligt at finde denne fordeling, bortset fra nogle få tilfælde som f.eks. en lineær regressionsmodel med normalfordelte observationer. Til gengæld er gode approksimationer for fordelingen af en estimator blevet udviklet. Disse approksimationer er ofte gyldige for mange nye estimatorer, som udviklingen

i de numeriske metoder har gjort det muligt at beregne.

Fordelingen af en estimator kan approksimeres enten analytisk eller numerisk. Den analytiske metode approksimerer fordelingen med den fordeling, estimatoren ville have, hvis man havde haft en meget stor stikprøve. Den numeriske metode simulerer estimatoren på en computer, enten ved at tage udgangspunkt i en fuldt specificeret teoretisk model, Monte Carlo metoden, eller ved at betragte stikprøven som den faktiske population, Bootstrap metoden. Monte Carlo metoden er nyttig, når man vil undersøge en estimators teoretiske egenskaber, hvorimod bootstrap metoden er velegnet til analyse af estimatorens egenskaber for et konkret datasæt.

2.1 Generel teori: Ekstremum estimatorer og asymptotisk teori

Langt de fleste estimatorer findes ved at maksimere eller minimere en objektfunktion. Derfor har disse estimatorer fået fællesbetegnelsen *ekstremum estimatorer*. I dette afsnit giver vi eksempler på ekstremum estimatorer og slutter med en samlet teori for deres fordeling.

Generelt kan ekstremum estimatoren, $\hat{\theta}_T$, defineres som den værdi af parameteren θ , som maksimerer en objektfunktion, der i de fleste tilfælde kan formuleres som $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T q_t(w_t, \theta)$, hvor T er stikprøvestørrelsen, q_t er observation t 's bidrag til objektfunktionen, og $w_t = (y_t, x_t)'$ er en vektor af endogene, y_t , og eksogene variable, x_t . Formelt er ekstremum estimatoren defineret ved

$$\hat{\theta}_T = \arg \max_{\theta} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T q_t(w_t, \theta) \quad (1)$$

Det mest kendte eksempel på en ekstremum estimator er mindste kvadraters metode. I en generaliseret udgave med en ikke-lineær regressionsfunktion $m(x_t, \theta)$ er den ikke-lineære mindste kvadraters estimator, NLS, defineret som $\hat{\theta}_T = \arg \min_{\theta} \frac{1}{T} \sum (y_t - m(x_t, \theta))^2$. Et andet typisk eksempel på en ekstremum estimator er Maximum Likelihood, ML, estimatoren, hvor objektfunktionen er sandsynligheden for stikprøven, en sandsynlighed der skal maksimeres over alle mulige parameterværdier. ML estimatoren af θ er defineret som $\hat{\theta}_T = \arg \max_{\theta} \frac{1}{T} \sum \log f(y_t | x_t, \theta)$, hvor f er den betingede tæthedsfunktion for y_t givet x_t . Se afsnit 3.1 for et eksempel på en ML estimator.

I de sidste 10 år er den Generaliserede Moment Metode estimator, GMM, som også er en ekstremum estimator, blevet meget anvendt. Stokastisk, intertemporale modeller vil ofte have en likelihood funktion, som i praksis er for kompliceret til at tillade maximum likelihood estimation, men løsningen af disse modeller resulterer ofte i en første ordens betingelse, Eulerligningen, som er en forventet værdi lig 0. Denne teoretiske momentrestriktion anvendes af GMM estimatoren, som ikke forudsætter en fuld specifikation af den stokastiske proces, sådan som maximum likelihood gør. Prisen for dette vil ofte være tab af efficiens. Et eksempel er den såkaldte *Consumption Capital-Asset Pricing Model*, C-CAPM, se afsnit 5.

I C-CAPM maksimerer en repræsentativ agent den forventede tilbage-diskonterede nytte, u_t , af fremtidigt forbrug, c_{t+j} , $j = 0, 1, \dots$ givet en budgetbegrænsning og informationen, I_t , og ved anvendelsen af diskonteringsfaktoren δ . Et eksempel på en mulig nyttefunktion er den isoelastiske nyttefunktion $u_t(c_t) = \frac{1}{1-\alpha} (c_t^{1-\alpha} - 1)$, hvor α er den intertemporale substitutionselasticitet. Eulerligningen bliver $E(\delta c_{t+1}^{-\alpha} r_{t+1} | I_t) / c_t^{-\alpha} = 1$, hvor r_{t+1} er realafkast af formuen. Ved at definere $\theta = [\delta, \alpha]'$, $w_t = [c_{t+1}/c_t, r_{t+1}]'$, $g(w_t, \theta) = \delta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\alpha} r_{t+1} - 1$, kan Eulerligningen skrives som

$$E(g(w_t, \theta) | I_t) = E_t(g(w_t, \theta)) = 0 \quad (2)$$

Vi skal estimere to parametre. Eulerligningen bruges til at danne tilstrækkelige momentrestriktioner, her mindst to, ved hjælp af instrumentvariable, z_t , som er kendte på tidspunkt t , dvs. tilhører I_t . Ved hjælp af itererede middelværdier fås

$$\begin{aligned} E(z_t g(w_t, \theta)) &= E(E(z_t g(w_t, \theta) | I_t)) \\ &= E(z_t E(g(w_t, \theta) | I_t)) = E(z_t 0) = 0 \end{aligned}$$

Vi kan da estimere de to parametre, α, δ , ved hjælp af disse to instrumentvariable z_{1t} og z_{2t} , idet de teoretiske momentrestriktioner erstattes med de empiriske momentligninger $\frac{1}{T} \sum z_{1t} g(w_t, \hat{\theta}) = 0$ og $\frac{1}{T} \sum z_{2t} g(w_t, \hat{\theta}) = 0$, som løses med hensyn til $\hat{\theta}$.

For eventuelt at opnå en mere efficient estimator kan man bruge flere instrumenter end parametre, hvorved vi får flere empiriske momentrestriktioner end ukendte parametre og derfor minimerer en vejlet sum af kvadrater af de empiriske momentbetingelser.

Generelt defineres GMM estimatoren af θ som

$$\hat{\theta}_T = \arg \min_{\theta} \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T h(w_t, \theta) \right)' S_T \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T h(w_t, \theta) \right) \quad (3)$$

hvor S_T er en vægtmatrix, som kan afhænge af data, og h er en vektor af momentrestriktioner.

Den approksimative fordeling af en ekstremum estimator $\hat{\theta}_T$ kan udledes generelt uden særlig hensyntagen til hvilken ikke-lineær funktion, der maksimeres. Hertil anvendes asymptotisk teori, hvor ideen er at undersøge, hvad der sker med fordelingen af estimatoren, hvis stikprøvestørrelsen går mod uendelig. For mindre, givne stikprøvestørrelser gælder fordelingen derfor kun approksimativt, og man kender ikke approksimationsfejlen. Ekstremum estimatoren er typisk asymptotisk normalfordelt.

Til udledning af den asymptotiske fordeling af $\hat{\theta}_T$ anvendes en Taylor-rækkeudvikling af første ordens betingelserne for maksimering af objektfunktionen omkring den sande parameter θ_0 . For at lave Taylor-rækkeudviklingen antager man, at q_t består af kontinuerte, differentiable funktioner for alle θ værdier. Om variabelnes fordeling antages i det simple tilfælde, hvor w_t er identisk, uafhængig fordelt, at de to første momenter eksisterer, $E(w_t) < \infty$, $E(w_t^2) < \infty$ for alle t . Men med lidt andre restriktioner kan man finde den asymptotiske fordeling også for svagt afhængige processer evt. med deterministiske trends. For stærkt afhængige, ikke stationære processer kan man finde andre asymptotiske resultater, se afsnit 4 om tidsserieøkonometri.

Under passende antagelser får man således det generelle resultat, at ekstremum estimatoren konvergerer mod den sande værdi θ_0 , og at estimatoren normeret med \sqrt{T} konvergerer til en normalfordeling. Formelt udtrykt,

$$\sqrt{T} (\hat{\theta}_T - \theta_0) \xrightarrow{D} N(0, V^\infty(\theta_0)) \quad (4)$$

hvor \xrightarrow{D} betyder konvergens i fordeling, og $V^\infty(\theta_0)$ er den asymptotiske fordelings kovariansmatrix.

2.2 Anvendelse af teorien: Beregning af kovariansen

For at kunne anvende den asymptotiske teori skal den asymptotiske kovariansmatrix V^∞ beregnes. Under forudsætning af, at estimatoren er af typen (1), er V^∞ en funktion af den første ordens afledede af objektfunktionen

q_t , benævnt score vektoren s_t og den anden ordens afledede af q_t , benævnt Hessian matricen H_t . Den asymptotiske kovarians er givet som

$$V^\infty(\theta_0) = \mathcal{J}^{-1}(\theta_0) \mathcal{I}(\theta_0) \mathcal{J}^{-1}(\theta_0) \quad (5)$$

hvor $\mathcal{I} = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T s_t s_t' \right]$ og $\mathcal{J} = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{-1}{T} \sum_{t=1}^T H_t \right]$.

I praksis har vi behov for konsistente estimatorer af \mathcal{J} og \mathcal{I} . Eftersom \mathcal{J} er en middelværdi, vil $\widehat{\mathcal{J}}_T = \frac{-1}{T} \sum_{t=1}^T H_t$ være en konsistent estimator under meget svage forudsætninger, hvorimod \mathcal{I} er varians-kovariansmatricen for score vektoren, hvorfor en konsistent estimator må tage højde for eventuel heteroskedasticitet og autokorrelation. I begge estimators erstattes θ_0 med en konsistent estimator, $\widehat{\theta}_T$. Den herved opnåede estimator kaldes i folkemunde ofte *Sandwich estimatoren*.

Variansudtrykket simplificeres under visse regularitetsbetingelser og for en model, der er specificeret korrekt med hensyn til dynamik og fordeling. I sådanne tilfælde gælder, at $\mathcal{I} = \mathcal{J}$ og tre meget benyttede estimators af V^∞ er den inverse af den Observerede Informationsmatrix $\widehat{V}_{OIM} = \left(\frac{-1}{T} \sum H_t \right)^{-1}$, den inverse af den Forventede Informationsmatrix eller Fishers Information $\widehat{V}_{EIM} = \left(\frac{-1}{T} \sum E(H_t) \right)^{-1} = \left(\frac{1}{T} \sum E(s_t s_t') \right)^{-1}$, og den inverse af den Ydre Produkt matrix $\widehat{V}_{OP} = \left(\frac{1}{T} \sum s_t s_t' \right)$. Alle tre estimators er konsistente og efficiente, og derfor ækvivalente asymptotisk. Har man tiltro til, at ens model er korrekt specificeret, bør man anvende et af disse tre simple variansudtryk, men i andre situationer er det tilrådeligt at bruge (5). Forskellen mellem det simple og det generelle variansudtryk danner basis for en række fejlspecifikations tests.

Selvom de tre simple variansestimators er asymptotisk ækvivalente, kan de for en given stikprøve give meget forskellige estimater af V^∞ . Monte Carlo simulationer har demonstreret, at \widehat{V}_{OIM} og \widehat{V}_{EIM} er betydeligt mere præcise end estimater baseret på \widehat{V}_{OP} . Dette resultat fremkalder en generel advarsel om, at asymptotiske resultater *ikke* nødvendigvis giver en god approksimation til resultaterne for en endelig stikprøve. Valget af variansestimator har også konsekvenser for Wald og LM testene, som anvender et varians estimat. Det har vist sig, at testene har vidt forskellige egenskaber afhængig af valg af variansestimator. Flere resultater tyder på, at test baseret på V_{OIM} og V_{EIM} har større styrke end test baseret på V_{OP} . En alternativ måde at udregne usikkerhed på vil blive præsenteret i afsnit 2.4 om bootstrap.

2.3 Misspecifikation: Pseudo ML og ikke-parametrisk estimation

Resultaterne, vi har præsenteret ovenfor, er alle udledt under forudsætning af en korrekt specificeret model, men da økonomisk teori sjældent giver konkrete svar på fordeling og specifikke funktionelle former, er dette en tvivlsom antagelse i praksis. I dette afsnit gennemgår vi to metoder, hvor den ene, pseudo ML, eller quasi ML, er robust overfor fejlspecifikation af fordelingen, og den anden, semi- og ikke parametrisk estimation, pålægger modellen færre antagelser, hvilket mindsker sandsynligheden for fejlspecifikation.

Pseudo ML er, som navnet antyder, en ML estimator, som ikke forudsætter en korrekt specificeret fordeling. Hvis en model er fejlspecificeret, risikerer man, at $\hat{\theta}_T$ er en inkonsistent estimator, og at det udtryk for V^∞ , som er udledt under en antagelse om en korrekt specificeret model, ligeledes er forkert. Da vi som nævnt sjældent har en korrekt specificeret model, er det vigtigt at finde forudsætninger, under hvilke vi har en konsistent estimator. For en stor klasse af modeller eksisterer en pseudo-maximum likelihood estimator, PML, som er en konsistent estimator af θ , og for hvilken man kan udlede en korrekt asymptotisk varians.

Betragt en fejlspecificeret model, dvs. den sande fordeling tilhører ikke den familie af fordelinger, som anvendes i vores likelihood funktion. Den fordeling, som anvendes i likelihood funktionen, benævnes den pseudo sande fordeling. Antag eksempelvis, at den datafrembringende proces opfylder

$$y_t = m(x_t, \beta) + u_t \quad (6)$$

og

$$E(y_t|x_t) = m(x_t, \beta), \quad t = 1, 2, \dots$$

hvorfor $E(u_t|x_t) = 0$. Det kan vises, at for enhver funktion m og enhver asymptotisk fordeling af $\{x_t\}$, får man en konsistent estimator $\hat{\beta}^*$, hvis og kun hvis den pseudo sande fordeling vælges fra en familie af en lineær eksponentiel tætheder, der for eksempel omfatter Binomial, Poisson, Gamma, Normal og Multinomial fordelingen. PML estimatoren er også asymptotisk normalfordelt. Det er således ikke nødvendigt at have en antagelse om den sande fordeling af u_t , men kun om dens betingede middelværdi. Kender man den sande familie af fordelinger, er ML estimatoren naturligvis mere efficient end PML estimatoren.

Vælges normalfordelingen som pseudo sand fordeling i model (6), får man en PML estimator, som svarer til en multivariat, ikke-lineær mindste kvadraters estimator. Har man et konsistent estimat, $\widehat{\Omega}_t$, på variansen af $y_t|x_t$, og er $E(u_t u_{t+j} | x_t x_{t+j}) = 0$, $j > 1$, er den generaliserede mindste kvadraters estimator, $\widehat{\beta}^* = \min_{\beta} \sum_{t=1}^T (y_t - m_t(x_t, \beta))' \widehat{\Omega}_t^{-1} (y_t - m_t(x_t, \beta))$ en konsistent estimator, som er efficient i klassen af PML estimatører af (6), dvs. at $\widehat{\Omega}_t^{-1}$ er en optimal vægtmatrix. I dette tilfælde simplificerer variansudtrykket i (5) til $\widehat{V} = [(1/T) \sum_{t=1}^T (\partial m_t / \partial \beta')' \widehat{\Omega}_t^{-1} (\partial m_t / \partial \beta')]^{-1}$.

Anvender man almindelig ikke lineær mindste kvadraters metode til estimation af β i (6) tages der ikke hensyn til mulig hetroskedasticitet. Man kan dog stadig få et konsistent estimat på variansen ved hjælp (5). I det lineære tilfælde hvor $m(x_t, \beta) = x_t' \beta$ er dette estimat, \widehat{V} , lig Whites *Heteroskedasticity Consistent Variance Estimator*

De modeller, vi har behandlet, er alle parametriske, dvs. kun et endeligt antal parametre er ukendte, θ . En ukendt funktionsform eller fordeling kan betragtes som en ukendt parameter ϕ af uendelig dimension og giver anledning til enten en ikke parametriske model P_{ϕ} eller en semiparametriske model $P_{\phi, \theta}$, hvor kun θ er af interesse.

Eksempler på semiparametriske modeller er ikke lineære regressionsmodeller med ukendt regressionsfunktion eller fordeling og Eulerligninger (2), hvor man ikke har specificeret hele fordelingen, men kun den betingede middelværdi.

Under visse betingelser er det muligt at finde en efficient semiparametriske estimator. Denne vil være mindst lige så efficient som den dårligste parametriske model, der omfatter den semiparametriske model. Givet at man kan finde en konsistent estimator af $V(g(w_t, \theta))$, vil en GMM estimator, som bruger den inverse af denne varians som vægtmatrix i (3), være en efficient semiparametriske estimator.

Til at illustrere ideen i ikke-parametriske estimation betragter vi et eksempel, hvor den funktionelle form for en regressionsfunktion er ukendt. En regressionsfunktion $E(y|x_0)$ kan beregnes som gennemsnittet af alle de y 'er, hvis tilhørende værdi af x er lig x_0 . Denne fremgangsmåde er imidlertid ikke brugbar i praksis, fordi der kun findes T x -værdier, hvorved $E(y|x_0)$ kun er defineret for T værdier, og, hvis alle x 'erne er forskellige, bliver hvert gennemsnit beregnet ud fra en observation. Tricket til at komme udenom dette problem er at udregne den betingede middelværdi af y givet x_0 for y værdier, hvis tilhørende x -værdier er i en *omegn* af x_0 . For eksempel, regressionsfunk-

tionen i x_0 udregnes som et vejet gennemsnit af alle y 'erne, hvor vægten, kaldet kernen eller *kernel*, er en funktion som aftager med afstanden mellem x_0 og den til y hørende x . Et typisk eksempel på en vægtfunktion er den normale tæthedsfunktion ϕ , evalueret i $[(x - x_0)/h]$, hvor parameteren h , kaldet båndvidden eller *bandwidth*, regulerer koncentrationen af vægten omkring x_0 . Værdien af h skal afbalanceres efter stikprøvens størrelse, idet en stor værdi af h giver større bias, men mindre varians, og vice versa. Den optimale værdi af h bestemmes i praksis ved krydsvalidering, hvor man for forskellige h estimerer regressionsfunktionen på en delmængde af stikprøven og undersøger hvor godt den estimerede regressionsfunktion passer på den del af stikprøven, der ikke har været anvendt til estimation.

2.4 Bedre approksimation: Bootstrap

Anvendelse af den asymptotiske teori giver egenskaberne af en estimator i store stikprøver, men disse egenskaber gælder ofte ikke i små stikprøver. For at forbedre normalfordelingsapproksimationen fra afsnit 2.1 kan man udlede en højere-ordens Taylor approksimation, som kan anvendes til at korrigere enten fordelingen eller estimatoren. Disse korrektioner kan være besværlige at udlede og bruge, hvorimod en forholdsvis simpel, men computer intensiv metode til at opnå samme forbedring er bootstrapping. Monte Carlo resultater tyder på, at både højere ordens approksimation og bootstrap virker for selv små T . I dette afsnit gennemgår vi nogle eksempler på anvendelse af bootstrapping.

Bootstrapping kan illustreres med et eksempel på beregning af et konfidensinterval for en middelværdi. Lad $F(x)$ være populationens ukendte fordelingsfunktion for x , og $m(F)$ middelværdien af x . For at udregne m i praksis er det nødvendigt at have et estimat af F . Det naturlige valg er den empiriske fordelingsfunktion givet som $\widehat{F}(x) = \frac{1}{T} \sum 1_{\{x_t < x\}}$, hvor hver af de T observationer x_t tilskrives sandsynligheden $1/T$. $1_{\{\cdot\}}$ er indikatorfunktionen. Herefter kan middelværdien udregnes som $m(\widehat{F})$, som er lig med det sædvanlige aritmetiske gennemsnit, $\bar{x} = \frac{1}{T} \sum x_t$.

Et 95% symmetrisk konfidensinterval er defineret ved $P(\bar{x} - t \leq \mu < \bar{x} + t) = 0,95$ eller udtrykt generelt i den netop introducerede notation

$E_F \left(1_{\{m(\widehat{F}) - t \leq m(F) \leq m(\widehat{F}) + t\}} - 0,95 \mid F \right) = 0$. Denne kaldes *populationsligningen*, fordi den kræver kendskab til populationen, hvad vi ikke har. I stedet skifter vi F ud med \widehat{F} , og \widehat{F} med F^* , en *bootstrap fordeling*, som define-

res nedenfor. Vi kan nu opstille en ligning, som ikke kræver kendskab til populationen $E_{\widehat{F}} \left(\mathbf{1}_{\{m(F^*)-t^* \leq m(\widehat{F}) \leq m(F^*)+t^*\}} - 0,95 | \widehat{F} \right) = 0$. Denne ligning kaldes *stikprøveligningen* og kan benyttes til at bestemme konfidensintervallet $(\bar{x} - t^*, \bar{x} + t^*)$. Håbet er, at stikprøveligningen er en god approksimation til populationsligningen. Dette kaldes *the bootstrap principle* og består altså af, at man forestiller sig, at stikprøven faktisk er populationen.

For en generel statistik, $h(F)$, vil udledningen af fordelingen af $h(F)$ kræve kendskab til populationen, men i stedet kan vi altså approksimere fordelingen af $h(\widehat{F})$ med bootstrapfordelingen, $F^*(h)$.

Bootstrapfordelingen $F^*(h)$ udregnes ved, at man for ethvert muligt udfald med T observationer trukket fra \widehat{F} beregner de tilhørende værdier af h . Hvis observationerne er uafhængige, er der T^T mulige udfald og værdier af h . For eksempel, hvis $T = 2$ er der 4 mulige udfald (x_1, x_1) , (x_2, x_2) , (x_1, x_2) og (x_2, x_1) , hver med sandsynligheden $1/4$. Bemærk at hvis rækkefølgen er ligegyldig for værdien af h , giver (x_1, x_2) og (x_2, x_1) samme værdi af h , og generelt er der $\binom{2T-1}{T}$ mulige værdier af h . Derfor har bootstrapfordelingen $F^*(h)$ for $T = 2$, tre massepunkter, de to med sandsynlighed $1/4$ og det tredje med $1/2$. Fra $F^*(h)$ kan man beregne variansen, eller en hvilken som helst statistik man måtte ønske.

Med større T er der så mange mulige udtræk fra $\widehat{F}(x)$, at det ikke er praktisk muligt at betragte samtlige udtræk. Man kan i stedet simulere $F^*(h)$ ved at lave B bootstrap stikprøver \mathbf{x}_i^* , $i = 1, \dots, B$, hver med T observationer. Hver bootstrap stikprøve laves som en simpel tilfældig stikprøve med tilbagelægning fra $\widehat{F}(x)$. For hver bootstrapstikprøve beregnes h_i^* . Et estimat på bootstrap fordelingen $\widehat{F}^*(h)$ fås ved at tillægge h_i^* sandsynligheden $1/B$. Dette svarer til en Monte Carlo simulation med den undtagelse, at man bruger $\widehat{F}(x)$ i stedet for $F(x)$. Hvis h er en kompliceret funktion kan bootstrapberegningerne kræve en del computerkraft. Typisk er $B = 200$ tilstrækkelig.

Bootstrappen kan konstrueres således, at dens præcision for et givet T er af en højere orden end den, der opnås ved anvendelse af standard asymptotisk teori. Præcisionen af bootstrap fordelingen F^* afhænger af h . Typisk er fejlen af ordenen $T^{-1/2}$ som for standard asymptotisk teori, hvilket betyder, at fejlen multipliceret med T opløftet i en hvilkensomhelst eksponent mindre end $1/2$ går mod 0. Bootstrapping er særligt attraktivt i tilfælde, hvor h er asymptotisk pivotal, dvs. dens asymptotiske fordeling ikke afhænger af ukendte parametre. I disse tilfælde er fejlen af mindre orden end $T^{-1/2}$, typisk

T^{-1} .

I lineære regressionsmodeller er bootstrap fejlen helt ned til orden T^{-2} ved udregning af to-sidede konfidensintervaller for hældningskoefficienten. Betragt den simple lineære regressionsmodel $y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$, hvor u_t 'erne er uafhængige og identisk fordelte med ukendt fordelingsfunktion og varians σ^2 . Betragt vi den asymptotiske fordeling af OLS estimatoren $\hat{\beta}$, afhænger den af β og σ . Betragt vi istedet den studentiserede statistik $z = (\hat{\beta} - \beta)/\hat{\sigma}_\beta$, hvor $\hat{\sigma}_\beta^2$ er variansen af $\hat{\beta}$, afhænger den asymptotiske fordeling, $N(0, 1)$, ikke af ukendte parametre: z er asymptotisk pivotal. For at finde bootstrap fordelingen af z benyttes bootstrap princippet, hvor stikprøven betragtes som populationen, hvorved β og σ kan erstattes af stikprøveværdierne $\hat{\beta}$ og $\hat{\sigma}$.

Fra stikprøven $(y_1, x_1), \dots, (y_T, x_T)$ beregner vi $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}_\beta, \hat{u} = [\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_T]'$. Der laves nu B bootstrap stikprøver. En bootstrap stikprøve dannes ved at trække T residualer fra \hat{u} . Hvert element \hat{u}_t har sandsynlighed $1/T$ for at blive trukket, og der trækkes med tilbagelægning. For hver bootstrap stikprøve $[\hat{u}_1^*, \dots, \hat{u}_T^*]$ dannes $y_t^* = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_t + \hat{u}_t^*$, $t = 1, \dots, T$ og på sædvanlig vis beregnes mindste kvadraters estimaterne $\hat{\beta}^*$ og $\hat{\sigma}_\beta^*$. For hver bootstrap stikprøve beregnes $z_j^* = (\hat{\beta}_j^* - \hat{\beta})/\hat{\sigma}_{\beta_j}^*$, $j = 1, \dots, B$. De resulterende B værdier af z^* gives hver sandsynligheden $1/B$, hvorved dens empiriske fordeling \hat{F}^* kan udregnes. Lad 2.5% og 97.5% percentiler af \hat{F}^* være henholdsvis ν^- og ν^+ . Herefter kan et 95% konfidensinterval udregnes som $(\hat{\beta} - \hat{\sigma}_\beta \nu^-, \hat{\beta} + \hat{\sigma}_\beta \nu^+)$.

Den just beskrevne bootstrap metode kaldes en ikke-parametrisk bootstrap, fordi man ikke antager at fordelingen af u tilhører en bestemt parametriske familie af fordelinger, når man laver bootstrapudtrækkene. Hvis man kan antage, at fordelingen af u kommer fra en bestemt fordeling, kan man forbedre bootstrappen. Hvis man for eksempel antager, at u_t er $N(0, \sigma^2)$, trækkes u_t^* fra $N(0, \hat{\sigma}^2)$. Dette er en parametrisk bootstrap. Bemærk, at beregningerne i dette tilfælde er sammenfaldende med en Monte Carlo simulation, hvor de ukendte parametre fastsættes til de i stikprøven estimerede værdier.

Teststatistikker er typisk asymptotisk pivotale, hvorved bootstrap'en kan benyttes succesfuldt til at finde en bedre approksimation af testets fordeling. Derved er det muligt at vælge kritiske værdier, således at sandsynligheden for en type I fejl af testet er meget tættere på det ønskede nominelle signifikansniveau.

2.5 Fremtidig udvikling i økonometrisk teori

Udviklingen af en abstrakt, men generel asymptotisk teori har gjort det muligt at udlede approksimative fordelinger for komplicerede estimators og teststatistikker. Denne udvikling fortsætter imod mere præcise, højere ordens, approksimationer. Nye teknikker til at udlede asymptotiske resultater bliver også udviklet. For eksempel har empirisk procesteorier allerede givet resultater som vanskeligt ville kunne blive udledt med de traditionelle teknikker.

Nye estimators bliver også udviklet, herunder simulerede estimators, der gør det muligt at estimere komplicerede modeller, som for eksempel bruges i mikroøkonometri.

Vi har kun svagt berørt emnet om test. Approksimative fordelinger for test kan ofte udledes med de samme asymptotiske teknikker som beskrevet i 2.1. For eksempel, asymptotisk er Wald, LR og LM testene χ^2 fordelte, hvorved deres asymptotiske egenskaber er ens. Testenes egenskaber i endelige stikprøver udgør et aktivt forskningsområde, idet asymptotisk teori ofte giver en dårlig approksimation. For eksempel viser det sig, at det meget brugte Wald test, t -testet, har mange uheldige egenskaber og bør undgås i tilfælde, der ligger udenfor den simple lineære model.

Til yderligere at belyse teorien for ekstremum estimators kan Amemiya (1985), Gourioux og Monfort (1995) og Newey og McFadden (1994) anbefales. En lettere og mindre teknisk behandling af emnet kan findes i McCabe og Tremayne (1992), hvorimod Barndorff-Nielsen og Cox (1989) er sværere og mere henvendt til statistikere. Variansestimators er behandlet i Davidson og MacKinnon (1984) og Wooldridge (1994). Et godt overblik over bootstrap kan findes i Hall (1994), mens Hall (1992) giver en meget udførlig version. Pseudo ML kan også findes i Gourioux og Monfort (1995). Endelig har Härdle (1990) en god indføring i ikke-parametrisk estimation.

3 Mikroøkonometri

Igennem de seneste 20-25 år er der sket en særdeles kraftig vækst i anvendelsen af mikrodata og i udviklingen og anvendelsen af økonometriske metoder til at studere mikroøkonomiske problemstillinger. Anvendelsesområderne omfatter arbejdsmarkedsøkonomi, sundhedsøkonomi, befolkningsøkonomi, industriøkonomi og mange andre områder inden for anvendt økonomi.

Baggrunden for denne udvikling har været et samspil af flere forskellige

faktorer. Der er sket en eksplosion i datamængderne, således at der i dag findes meget store mikrodatasæt. Desuden har den teknologiske udvikling givet muligheder for at behandle og analysere meget store datamængder med komplicerede økonometriske metoder. Endelig har der også inden for økonomisk teori været stærkere fokus på det mikroøkonomiske fundament for makroøkonomien, hvilket har inspireret til empiriske økonomiske analyser af mikroøkonomiske problemstillinger.

På en række punkter adskiller mikroøkonometri sig fra andre områder inden for økonometrien. Mikrodata vil være i form af individdata, enten som cross-section data eller som paneldata, og sådanne data har nogle karakteristiske træk, som vil afspejles i specifikationen af de mikroøkonometriske modeller og de estimationsmetoder, der anvendes.

For det første udviser data ofte en meget stor variation hovedsageligt på grund af individuel variation. Derfor skal modelspecifikationer typisk tillade en meget høj grad af variation. Det er således ikke usædvanligt at se mikroøkonometriske analyser med en 'forklaringsgrad' på 5-10 %, og i mange tilfælde endda lavere, samtidig med at der er mange signifikante variable i modellen. Dette tages der i en vis grad højde for via introduktion af uobserveret heterogenitet og målefejl i modellerne.

For det andet har data sædvanligvis, som følge af den undersøgte problemstilling, et eller flere karakteristiske træk, som modellerne og estimationsmetoderne er nødt til eksplicit at tage højde for. Der kan være tale om diskrete data (deltagelse vs. ikke-deltagelse), censorerede data (forbrug), trunkeerede data (reservationsløn), grupperede data, varighedsdata, etc. Dette betyder også, at det "arsenal" af fordelingsantagelser, som anvendes, er meget bredere end inden for andre områder af økonometrien.

For det tredje er der ofte langt højere grad af overensstemmelse mellem den økonomiske teoris begreber og mikrodata, hvilket gør det muligt med mikroøkonometriske metoder at modellere restriktioner fra den økonomiske teori. Et centralt træk ved mange anvendelser af mikroøkonometri er den tætte sammenhæng mellem økonomisk teori og økonometrisk praksis. Ofte er det stokastiske element i modellerne en integreret del af såvel den økonomisk-teoretiske model som den økonometriske specifikation fremfor blot at være et fejllid, der tilføjes modellen. Et af de mest åbenlyse eksempler på dette er jobsøgemodeller, se bl.a. Devine og Kiefer (1991) for en oversigt.

Endelig er mikroøkonometriske modeller i høj grad ikke-lineære, selv om de typisk vil indeholde et lineært element i form af $x'\beta$, hvor x er en vektor af regressorer, og β er en vektor af koefficienter. Dette betyder dels, at estima-

tionsmetoderne kan være temmelig beregningsintensive, og dels at fortolkning af resultaterne bliver mere kompliceret end i simple lineære modeller.

I det følgende vil vi gennemgå tre forskellige typer af modeller, som illustrerer nogle af de vigtigste områder inden for mikroøkonometrien. Det drejer sig om modeller for individuelle beslutninger, modeller for paneldata og modeller for varighedsdata.

3.1 Modeller for individuelle beslutninger

De data, som analyseres i mikroøkonometri, stammer ofte fra observationer af individuelle beslutninger. Der kan være tale om beslutninger, hvor der vælges mellem blot to alternativer, hvor der vælges mellem n forskellige muligheder, eller hvor valget vil være beskrevet ved en kontinuert variabel, der dog ofte kan være begrænset, f.eks. af nul som en nedre grænse. Da data således kun kan antage et endeligt antal diskrete værdier eller på anden måde er begrænset i de mulige værdier, som de kan antage, taler man om *limited dependent variable* eller om *the econometrics of corners, kinks and holes*, se Pudney (1989).

Hvis den situation, som vi ønsker at modellere, kun indebærer et valg mellem to alternativer, vil vi observere enten $y_i = 1$ eller $y_i = 0$. Er x_i en vektor, der indeholder de forklarende variable, som bestemmer y , kan vi opskrive vores model som

$$P(y_i = 1|x_i) = F(x_i'\beta) \quad (7)$$

hvor F er en fordelingsfunktion. Fordelingsfunktionen F kan vælges, så den passer til den konkrete problemstilling, men blandt de mest anvendte specifikationer er den logistiske fordelingsfunktion,

$$F(u) = \frac{e^u}{1 + e^u} \quad (8)$$

der anvendes i logit modellen, eller standardnormalfordelingens fordelingsfunktion

$$F(u) = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (9)$$

der anvendes i probit modellen.

På basis af specifikationen af F kan log-likelihood funktionen opstilles, og ML estimatoren for β kan findes ved maksimering af denne. Da likelihoodligningerne er ikke-lineære vil en numerisk løsning af disse være nødvendig for

at finde ML estimatet af β . Estimatoren vil være asymptotisk normalfordelt og have de sædvanlige pæne egenskaber for ML estimators, se afsnit 2.1.

Den økonometriske model for et binært valg kan også udledes ud fra en underliggende adfærdsmodel, hvor individet maksimerer sin nytte i en situation med usikkerhed, der enten optræder i form af stokastiske præferencer eller opstår som følge af optimeringsfejl.

I en situation, hvor der kan vælges mellem flere forskellige muligheder, kan en multinomial udgave af logit eller probit modellen benyttes. For de multinomiale modeller opstår der yderligere komplikationer som følge af den mulige korrelationsstruktur, der kan være i valget mellem de forskellige muligheder. Den multinomiale logit model er beregningsmæssigt simpel, men implicerer uafhængighed af irrelevante alternativer, hvilket i praksis kan være en særdeles restriktiv antagelse. Den multinomiale probit model tillader generelle korrelationer mellem de enkelte alternativer, men til gengæld involverer beregningen af sandsynlighederne, og dermed log-likelihood funktionen, udregning af flerdimensionale integraler over simultane normalfordelingsstætheder, hvilket kun er muligt for et forholdsvist begrænset antal alternativer. Det er et problem, der også er kendt som *the curse of dimensionality*. I stedet er det muligt at benytte mere generelle modeltyper som f.eks. modeller med *generalized extreme value* fordelinger, der tillader en mere fleksibel korrelationsstruktur samtidig med, at maksimum likelihood estimation ikke er beregningsmæssigt umuligt, se Pudney (1989) for nærmere detaljer.

Andre udvidelser af den simple binære model til situationer med flere valgmuligheder omfatter såvel modeller, hvor de enkelte muligheder er ordnede, *ordered logit* eller *probit*, som modeller med en hierarkisk struktur blandt de forskellige muligheder, *nested logit* eller *probit*.

Hvis den variabel, der skal modelleres, angiver et antal, dvs. y_i kan antage værdierne 0,1,2,... benyttes en sandsynlighedsmodel for en diskret stokastisk variabel, der kun kan antage ikke-negative heltalsværdier, en såkaldt *count data* model, se Winkelmann (1997). En simpel model for en sådan antalsvariabel er en Poisson regressionsmodel, hvor $P(y_i = k|x_i) = (\lambda^k/k!) \exp(-\lambda_i)$ med $\lambda_i = \exp(x_i'\beta)$.

Poissonmodellen vil dog i en række situationer være for restriktiv, idet den implicerer, at den betingede middelværdi og den betingede varians er ens, $E(y_i|x_i) = Var(y_i|x_i)$. Det er derfor nødvendigt at benytte mere fleksible modeller, der tillader såvel *overdispersion* som *underdispersion*, hvor det førstnævnte er hyppigst forekommende i praksis. Et eksempel på en sådan

mere fleksibel model er den negative binomialmodel, der kan udledes som den marginale model fra en Poissonmodel, hvor der indføres et gammafordelt stokastisk led til at opfange yderligere uobserveret individvariation. Også mere generelle fordelinger kan benyttes til at specificere count data modeller.

En yderligere udvidelse af denne type model kan opnås ved at indføre en *hurdle* i modellen. Både Poissonmodellen og de øvrige specifikationer, som er nævnt ovenfor, antager, at observationer med 0 og observationer med et positivt antal er genereret af den samme stokastiske proces. Et alternativ til denne antagelse er at specificere en hurdle model, hvor de to stokastiske processer for 0 og for positive antal tillades at være systematisk forskellige, se f.eks. Mullahy (1986). Lad f_1 og f_2 være sandsynlighedsfunktioner for ikke-negative heltal. Lad f_1 bestemme hurdle delen, hvor det bestemmes, om antallet skal være 0 eller positivt, altså et binært udfald, og lad f_2 bestemme processen, hvis hurdlen passerer, strengt positive værdier trunckeret ved 0. Sandsynlighedsfunktionen for denne model er givet ved

$$\begin{aligned} P(y_i = 0|x_i) &= f_1(0|x_i) & (10) \\ P(y_i = k|x_i) &= f_2(k|x_i) \frac{1 - f_1(0|x_i)}{1 - f_2(0|x_i)} \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Hurdle modellen tillader såvel over- som underdispersion, og modellen afviger fra f.eks. den negative binomialmodel ved at lade spredningen være individ-specifik. Maksimum likelihood estimation af modellens parametre gøres nemmere af, at log-likelihood funktionen er additiv separabel i parametrene for f_1 og f_2 , således at ML estimator kan opnås ved at maksimere de to dele separat. Efterfølgende kan det på standardvis testes, om opdelingen af modellen i de to dele er rimelig.

I andre sammenhænge kan den individuelle beslutning være beskrevet ved en kontinuert variabel, der er begrænset i hvilke værdier, den kan antage. Et eksempel på dette er ved empiriske økonomiske analyser af udgifter til køb af varige forbrugsgoder, hvor negative værdier ikke kan forekomme, men hvor værdien 0 meget ofte forekommer, svarende til at individet i den undersøgte periode ikke har købt varige forbrugsgoder. Observationer af 0 svarer til hjørneløsninger i den bagvedliggende økonomiske model. Specifikationen af modellen er

$$y_i = \begin{cases} x_i' \beta + u_i & \text{hvis } x_i' \beta + u_i > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (11)$$

Generelt skelner man mellem tilfælde, hvor data er censorerede, og tilfælde hvor data er trunkeerede. Hvis man ikke har nogen data, og i særdeleshed heller ingen forklarende variable x_i , for de observationer, der falder uden for grænsen, er der tale om trunkering. Hvis man derimod har kendskab til de observationer, der falder uden for grænsen, er der tale om censorering. Her vil man altså kende x_i , men ikke værdien af $x_i'\beta + u_i$, når dette udtryk er mindre end eller lig med 0. Denne model går under betegnelsen en Tobit model. MLE af β vil være konsistente, asymptotisk efficiente og asymptotisk normalfordelte, hvorimod almindelige OLS estimater vil være biased uanset om observationer af 0 inkluderes eller ej. I modeller med censorerede data kan man også indføre en hurdle i lighed med modellerne for count data. Derved vil man få en separat bestemmelse af hvilke observationer, der er begrænset, og hvilke værdier de ucensorerede observationer antager. Dette vil ofte være en mere passende model i en lang række anvendelser.

En af de umiddelbare udvidelser af disse modeller er til en model, hvor man endogent skifter mellem to tilstande med hver sin specifikation. En sådan *endogeneous switching regression*, ESR, model har f.eks. været brugt til at analysere lønligninger i den private og offentlige sektor. Modellen kan formuleres som

$$\begin{aligned}
 \text{ligning 1 } y_{1i} &= x'_{1i}\beta_1 + u_{1i} & (12) \\
 \text{ligning 2 } y_{2i} &= x'_{2i}\beta_2 + u_{2i} \\
 \text{selektionsligning } I_i^* &= \gamma_1 y_{1i} + \gamma_2 y_{2i} + x'_{3i}\beta_3 + u_{3i} \\
 y_i &= \begin{cases} y_{1i} & \text{hvis } I_i^* > 0 \\ y_{2i} & \text{hvis } I_i^* \leq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

hvor selektionsligningen bestemmer, hvilken af de to grundlæggende ligninger, man vil observere y fra. Da både y_{1t} og y_{2t} indgår i selektionsligningen, vil den observerede tilstand være endogent bestemt.

Nært beslægtet med modeller for censorerede og trunkeerede data er modeller for *sample selektion*. Et ofte forekommende problem i empiriske økonomiske analyser er, at de observerede data ikke kan betragtes som en tilfældig stikprøve fra den population, som man ønsker at undersøge. Hvis observationerne stammer fra beslutninger truffet af økonomisk, rationelt handlende individer, vil de observerede data som resultat af dette ofte være præget af en systematisk sammenhæng med de trufne beslutninger. Det klassiske eksempel på dette er kvinders arbejdsudbudsbeslutning, hvor der kun observeres et udbud for de kvinder, som beslutter sig til at deltage i arbejdsstyrken.

Hvis der ikke tages hensyn til en sådan sample selektion, som i dette eksempel fremkommer ved selv-selektion, er det et velkendt økonometrisk resultat, at estimation af modellens parametre bliver inkonsistent. Dette skyldes, at effekten fra de interessante parametre, som man ønsker at estimere, bliver sammenblandet med effekter fra de parametre, der bestemmer om observationerne medtages i stikprøven. Der findes en meget omfattende økonometrisk litteratur om sample selektionsproblemer og deres løsning. Med hensyn til estimation er den altovervejende metode ML. Der eksisterer, specielt omkring selektionsmodeller, nogle inefficente to-trins estimationsmetoder, Heckmans to-trins metode, se Heckman (1979), men disse er i dag stort set forældede på grund af udviklingen i computerkapacitet.

3.2 Modeller for paneldata

Paneldata eller longitudinale data fremkommer ved at følge en bestemt stikprøve af personer, virksomheder eller lign. over tid. Derved opnås gentagne observationer på hvert individ i stikprøven. Paneldata giver mulighed for at udføre empiriske økonomiske analyser af forhold, som ikke kan analyseres med konventionelle cross-section data eller tidsseriedata, se f.eks. Baltagi (1995), og Mátyás og Sevestre (1996) for oversigter over paneldata modeller. Den vigtigste fordel ved paneldata er, at de tillader, at der tages højde for uobserveret individuel variation via individ-specifikke led i modellerne. De økonometriske metoder kan eliminere eller tage højde for disse individ-specifikke forskelle, når der er gentagne observationer. En simpel lineær model for paneldata er

$$y_{it} = x'_{it}\beta + \alpha_i + \lambda_t + u_{it}, \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T \quad (13)$$

hvor α_i er individ-specifikke led og λ_t er tidsspecifikke led.

En tilsvarende paneldata model for en situation, hvor der er tale om en beslutning med et valg mellem to alternativer, kan være $P(y_{it} = 1) = F(\alpha_i + x'_{it}\beta)$ for $i = 1, \dots, N$ og $t = 1, \dots, T$, hvor der her kun er medtaget de individ-specifikke led α_i . I lighed med forrige afsnit kan F specificeres som en logit, en probit eller en helt anden fordelingsfunktion.

Fundamentalt set kan de individ- og tidsspecifikke led α_i og λ_t behandles på to forskellige måder: enten som faste parametre, *fixed effects*, eller som stokastiske variable, *random effects*. I den lineære paneldata model er der nu veludviklede estimationsmetoder for begge tilfælde. Hvis α_i og λ_t behandles som faste parametre, svarer det til at indføre passende dummyvariable. For at

undgå at estimere et meget stort antal parametre kan man dog transformere data ved at tage afvigelser fra individuelle gennemsnit og tidsgennemsnittet, hvorved α_i og λ_t forsvinder, og β kan derefter estimeres ved mindste kvadraters metode i en origoregression.

Hvis de specifikke led α_i og λ_t behandles som stokastiske variable, får modellen et fejledd sammensat af tre forskellige led ($\alpha_i + \lambda_t + u_{it}$) og bliver dermed en varianskomponentmodel. Her kræves der forudsætninger om kovariansstrukturen for fejleddet og dets enkelte komponenter, før modellens parametre kan estimeres.

Da det typisk er tilfældet, at N er meget stor, og T er lille, vil asymptotiske resultater for estimators i paneldata modeller næsten altid kun være relevante, når der ses på N gående mod uendelig for fast T . Det interessante er derfor at undersøge estimators asymptotiske egenskaber, når antallet af individer bliver stort men uden samtidigt at øge antallet af tidsperioder, hvor individerne observeres.

Når man bevæger sig bort fra den simple lineære paneldata model, opstår der imidlertid generelt estimationsproblemer på grund af de ovennævnte betragtninger om asymptotiske resultater. Betragtes α_i som fixed effects, vil der kun være et begrænset antal observationer (T) til at estimere hver α_i . Dette giver det velkendte *incidental-parameter* eller *nuisance parameter* problem, hvor det er meningsløst at vurdere estimators ud fra deres asymptotiske egenskaber. Ofte vil det heller ikke være muligt at estimere β konsistent, hvis α_i betragtes som faste parametre.

Også inden for dette område er der dog sket en kraftig udvikling af de økonomiske metoder. Således har Honoré (1992) udviklet metoder til at estimere paneldata modeller med fixed effects for censored og truncated data.

I lighed med modellerne for cross-section data kan sample selektion også udgøre et problem i forbindelse med panel data modeller. Den meget omfattende økonomiske litteratur omkring sample selektionsproblemet har dog næsten udelukkende fokuseret på cross-section tilfældet indtil nu. I et ganske nyt bidrag betragter Kyriazidou (1997) dog problemet for paneldata modeller, og hun foreslår en estimator, som er konsistent og asymptotisk normalfordelt under tilstedeværelse af både individ-specifikke effekter og sample selektion.

Da paneldata netop indeholder observationer til flere forskellige tidspunkter, er det også muligt at bruge modeller med dynamiske specifikationer. Bortset fra den simple lineære model for paneldata er dette er dog et om-

råde, hvor specifikation og estimationsmetoder er under stadig udvikling, se f.eks. Honoré og Kyriazidou (1997). En omfattende dynamisk specifikation bliver dog også delvist forhindret af, at antallet af tidsperioder typisk er lille. Her ligger sandsynligvis et af de store fremtidige udviklingsområder for paneldata modeller.

3.3 Modeller for varighedsdata

Et mikroøkonometrisk område, hvor der meget direkte arbejdes med dynamiske modeller, er varighedsanalyse. Dette er et af de områder, hvor der er sket den kraftigste udvikling, både på anvendelsessiden og med hensyn til den økonometriske teori. Det centrale spørgsmål er her, hvor længe opholdet i en given tilstand varer, og hvilke faktorer der bestemmer denne varighed. Der kan eksempelvis være tale om varigheder af ledighedsperioder, varigheder af strejker eller levetider for nystartede virksomheder. For visse af disse anvendelsesområder er der en meget stærk sammenhæng med økonomisk teori, f.eks. baserer analyser af ledighedsperioder sig ofte på søgeteori.

Lad den ikke-negative stokastiske variabel T beskrive den tid, der går, indtil der sker et skift af tilstand. Lad den stokastiske variabel T have den kontinuerte tæthedsfunktion $f(t)$ og fordelingsfunktionen

$$F(t) = P(T < t) = \int_0^t f(u) du \quad (14)$$

Inden for varighedsanalyse specificeres fordelingen af den stokastiske variabel T typisk ved hjælp af *hazardfunktionen*, der er givet ved

$$h(t) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \quad (15)$$

som angiver raten, hvormed tilstanden forlades, betinget af at opholdet i tilstanden allerede har haft varigheden t . Hazardfunktionen er en anden måde at repræsentere fordelingen af T på, som har en mere naturlig fortolkning i forbindelse med varighedsdata, se Kiefer (1988) eller Lancaster (1990). Specielt har varighedsafhængigheden af hazardfunktionen, dvs. fortegnet og størrelsen af $dh(t)/dt$, været af stor interesse i økonomiske sammenhænge.

En ofte anvendt modelspecifikation i økonometriske analyser er den proportionale hazardmodel $h(t|x) = \lambda(t) \gamma(x)$, hvor x er en vektor af forklarende variable. Her specificeres funktionen af de forklarende variable typisk

som $\gamma(x) = \exp(x'\beta)$, mens der er mange muligheder for at vælge en funktionsform for *baseline* hazardfunktionen, $\lambda(t)$. Et sådant valg af en bestemt funktionsform for $\lambda(t)$ implicerer også en bestemt statistisk fordeling for varigheden. Tidligere var der typisk tale om relativt simple parametriske specifikationer med én eller nogle få parametre i funktionsformen, men der er i de senere år sket et skift over mod mere og mere fleksible parametriske specifikationer med mange parametre for at tillade større fleksibilitet og semi-parametriske specifikationer. Blandt de simple specifikationer kan nævnes eksponential- og Weibullfordelingen, mens modeller med stykvis konstante hazardfunktioner kan gøres meget fleksible ved at tillade mange intervaller, mellem hvilke hazardfunktionen kan ændre værdi. En sådan specifikation kræver imidlertid også en større stikprøve.

Ved at opstille sådanne statistiske modeller og estimere parametrene ved maksimum likelihood metoden kan man inddrage en række af de specielle 'features', som kendetegner varighedsdata og -modeller: censorede varigheder, tidsvarierende forklarende variable, uobserveret heterogenitet m.m.

Tilstedeværelsen af uobserveret heterogenitet vil have som konsekvens, at den estimerede hazardfunktion vil udvise en falsk varighedsafhængighed i negativ retning. De øvrige parameterestimerer fra modellen kan også blive biased og inkonsistente. Uobserveret heterogenitet kan inkluderes i modellen via en *mixtur* fordeling, hvor der specificeres en fordeling for de stokastiske variable, der benyttes til at modellere den uobserverede heterogenitet, hvorefter disse integreres ud for at få den marginale fordeling af den observerede varighed. Valget af fordeling for heterogenitetsleddet er sjældent muligt på baggrund af økonomisk-teoretiske overvejelser. Ofte vælges fordelingen ud fra beregningsmæssige overvejelser omkring hvad der giver de mest bekvemme udtryk. Til dette formål er gammafordelingen særdeles velegnet. Der er dog også som alternativ til denne fremgangsmåde foreslået en ikke-parametrisk modellering, se Heckman og Singer (1984), hvor heterogenitetsfordelingen antages at være diskret med kun k støttepunkter med tilhørende sandsynligheder. Herved bliver mixtur fordelingen en sum over de k støttepunkter, hvor hvert led i summen vejes med sandsynligheden for det relevante støttepunkt. Såvel antallet af støttepunkter, deres værdi og de tilhørende sandsynligheder kan estimeres ved ML metoden.

Denne ikke-parametriske metode for mixtur fordelinger har dog nogle åbenlyse svagheder, der har gjort, at den ikke har fundet udbredt anvendelse i økonomiske analyser. For det første er den beregningsmæssigt krævende, og der kan forekomme multiple lokale maksimumspunkter. For det andet er

den asymptotiske teori for denne estimator endnu ikke veludviklet, når antallet af støttepunkter ikke kendes a priori. Det har derimod vist sig en lang række analyser og Monte Carlo studier, at en meget fleksibel parametrisk specifikation af modellen, i særdeleshed af den betingede baseline hazardfunktion, er tilstrækkeligt til at opnå robuste estimater af modellens parametre selv med uobserveret heterogenitet til stede.

Varighedsmodeller indeholder utallige muligheder for udvidelser: flere forskellige afslutningstilstande, *competing risks* modeller, korrelationer mellem varigheder i forskellige tilstande, grupperede varighedsdata, modeller med andre former for heterogenitet, tidsvarierende variable og effekter, o.s.v. Desuden er der stadig mange uløste økonomiske problemer for modeller for varighedsdata, så der sker til stadighed en udvikling af nye estimationsmetoder og modeltyper. Som et enkelt eksempel på dette kan nævnes, at også i varighedsmodeller er sample selektion et problem, der kan påvirke estimaterne og som derfor bør modelleres, se Ham og LaLonde (1996) og Rosholm (1997) for empiriske anvendelser.

3.4 Fremtidig udvikling i mikroøkonometri

En af de ting, som det kan være værd at bemærke i vurderingen af den fremtidige udvikling, er, at der tilsyneladende er en vis forsinkelse i den proces, hvormed nye økonomisk-teoretiske udviklinger slår igennem i empiriske økonomiske analyser. Det er således ikke noget særsyn at se empiriske analyser, som ikke benytter de allernyeste mikroøkonomiske landvindinger. Dette er dog et forhold, som den nye informationsteknologi kan være med til at afhjælpe med den lettere tilgængelighed til såvel litteratur som, ikke mindst, software, der implementerer de nyeste metoder.

Man må forvente, at udviklingen med en stærk integration af økonomisk teori og økonomisk metode vil fortsætte med forstærket kraft, så mikroøkonomiske modeller vil tage eksplicit hensyn til både adfærd, usikkerhed og målefejl. Der er således allerede en række nye mikroøkonomiske analyser, der tager direkte udgangspunkt i en økonomisk-teoretisk model og estimerer parametrene i strukturelle økonomiske modeller. Dette drejer sig f.eks. om ligevægtssøgemodeller og om stokastiske dynamiske programmeringsmodeller for beslutninger om pensionering, fertilitet, arbejdsudbud, etc. Disse modeller giver også i høj grad mulighed for at analysere den dynamiske adfærd.

I relation til modelspecifikation og estimationsmetoder vil udviklingen over mod mere fleksible funktionsformer, og dermed mere komplicerede funk-

tionsformer, formodentlig også fortsætte. Dette vil være en konsekvens af, at økonomisk teori ofte kun er i stand til at give en meget sparsom vejledning om den funktionelle form for sammenhængen mellem de økonomiske variable, samtidig med at datamængden vokser. I tæt sammenhæng med dette vil semi-parametriske modeller og estimationsmetoder også blive mere og mere attraktive, og der ses allerede i den økonometriske litteratur mange nye bidrag inden for dette område, se Powell (1994) for en oversigt.

Endeligt er der også et klart behov for bedre at kunne teste mikroøkonometriske modelspecifikationer. I et vist omfang hindres mulighederne for at lave diagnostiske test af, at der sjældent er en simpel måde at definere residualer på, ligesom de alternativer, der kan testes imod, sjældent er åbenlyse. Der er dog allerede udviklet en lang række både specifikke og generelle test til brug i mikroøkonometriske modeller, og dette er et område, hvor der også må forventes at komme nye bidrag fremover. Specielt er der behov for også at udbrede sådanne test til den mere anvendelsesorienterede del af mikroøkonometrien.

4 Tidsserieøkonometri

I afsnittet om tidsserieøkonometri behandles først analysen af ikke stationære tidsserier i form af *integrerede* og *kointegrerede* serier. Herefter gennemgås modeller til analyse af common features og tilsidst ikke lineære modeller.

4.1 Analyse af ikke-stationære tidsserier

Et af de mest markante bidrag i moderne tidsserie-økonometri er analysen af ikke-stationære, specielt *integrerede*, tidsserier. I langt de fleste lærebogsfremstillinger, ihvertfald før 1990'erne, antages det som udgangspunkt, at tidsserier er stationære, enten i den oprindelige form eller ved en transformation. At en transformation er nødvendig ses af, at mange økonomiske tidsserier har en trendmæssig udvikling, hvorved spektret får en kraftig koncentration af tæthed omkring nulfrekvensen. Dette kaldes *the typical spectral shape* af økonomiske tidsserier, se Granger og Newbold (1986). I den univariate litteratur har det derfor været praksis, se Box og Jenkins (1970), at tage første differenser af tidsserierne et passende antal gange, indtil autokorrelationsfunktionen aftager hurtigt nok til, at man kan antage, at den transformerede tidsserie er stationær, og spektret derfor bliver mindre koncentreret omkring

nul-frekvensen. Mere generelt kaldes en tidsserie integreret af orden d , $I(d)$, når den skal differentieres d gange for at have en stationær og invertibel ARMA repræsentation, og altså kan skrives som

$$\Phi(L)\Delta^d y_t = \Theta(L)\varepsilon_t, \quad (16)$$

hvor $\Phi(L)$ og $\Theta(L)$ er polynomier i lagoperatoren, som opfylder de sædvanlige stationaritets- og invertibilitetsbetingelser. Lagoperatoren er defineret ved $Ly_t = y_{t-1}$, mens $\Delta = 1 - L$ er første differensoperatoren. At differentiere en tidsserie før den egentlige anvendelse indebærer imidlertid, at man fjerner langsigtsudviklingen.

Observationen, at mange makro-tidsserier synes integrerede, fik Granger og Newbold (1974) til at foretage et interessant Monte Carlo forsøg. For en given stikprøvestørrelse genererede de uafhængige ikke stationære serier, såkaldte random walks, jf. nedenfor, som de efterfølgende regresserede på hinanden. Et vigtigt resultat var, at et t -test på et nominelt 5% niveau vil forkaste hypotesen, at der ingen afhængighed er imellem serierne i betragteligt mere end 5% af tilfældene. Granger og Newbold's resultater blev senere analyseret af Phillips (1986), som bl.a. viste, at den omtalte t -statistik faktisk vil gå mod uendelig med stikprøvestørrelsen. Selv for en stor stikprøve vil man altså konkludere, at der er en sammenhæng mellem iøvrigt uafhængige serier. Dette resultat har fået prædikatet *spurious regression* og advarer mod ukritisk at regressere integrerede tidsserier i niveau på hinanden. Faktisk er det kun gyldigt at udføre regression med $I(1)$ processer, når serierne er *kointegrerede*; d.v.s. selvom de enkelte serier f.eks. er integrerede af ordenen 1, er en linearkombination af serierne integrerede af en lavere orden, d.v.s. stationære $I(0)$. Granger (1983) og Engle og Granger (1987) var de første til redegøre for egenskaberne ved kointegrerede systemer, og dette har affødt en omfattende produktion af såvel teoretiske som empiriske resultater i de senere år. Deres bidrag til tidsserie-økonometrien har revolutioneret måden, hvorpå økonomiske hypoteser formuleres, og har desuden givet et statistisk rationale for at specificere økonomiske modeller, således at økonomiske kort-sigts og langt-sigts sammenhænge kan separeres og blive givet en attraktiv fortolkning i form af korrektion mod ligevægtssammenhænge.

Integration

For at lave gyldig inferens er det således uhyre vigtigt, at man er opmærksom på de enkelte tidsseriers stationaritetsegenskaber.

Lad os først ganske kort illustrere, hvorfor integrerede processer giver inferens problemer sammenlignet med stationære processer. Antag, at vi som specialtilfælde af (16) har en simpel autoregressiv, AR(1), proces givet ved

$$y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t \text{ hvor } |\alpha| < 1, \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2), y_0 = 0. \quad (17)$$

En sådan proces har en ækvivalent Moving Average repræsentation, der kan skrives som $y_t = \sum_{j=1}^t \alpha^{t-j} \varepsilon_j$, og den ubetingede varians er givet ved $\text{Var}(y_t) = \sigma^2 / (1 - \alpha^2)$. Standard asymptotisk teori indebærer, at ved estimation af α i en regression af y_t på y_{t-1} gælder resultatet

$$T^{1/2}(\hat{\alpha} - \alpha) \rightarrow N(0, 1 - \alpha^2), \quad (18)$$

hvor $\hat{\alpha}$ er OLS estimatoren, og T er antallet af observationer. Det ses, at for $\alpha = 1$ vil ovenstående udtryk ikke være veldefinerede, og desuden holder standard asymptotisk teori ikke, da denne forudsætter stationaritet. Specielt gælder normalitetsresultatet (18) ikke, se afsnit 2 ovenfor.

Antag i det følgende, at $\alpha = 1$, således at y_t har en enhedsrod, *unit root*, og dermed er integreret af orden en. Det indses nu fra (17), at $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$, d.v.s. y_t følger en random walk, og serien derfor kan skrives som $y_t = \sum_{j=1}^t \varepsilon_j$, hvilket benævnes en *stokastisk trend*. Det er dette resultat, der refereres til, når der tales om integrerede tidsserier, d.v.s. serien er bestemt som akkumulationen af alle fortidige stød til processen. En random walk er ét eksempel på en integreret proces som (17) med $\alpha = 1$ og et ikke autokorreleret fejllid. Bemærk at den sidste betingelse ikke er påkrævet, for at processen er integreret.

Det bemærkelsesværdige ved en integreret proces er, at et stød til processen i fortiden vil have en evigtvarende, persistent, effekt på niveauet af serien. Dette er i kontrast til stationære tidsserier, hvor et stød i fortiden blot har en temporær effekt og altså ikke har nogen asymptotisk indflydelse på niveauet af tidsserien. At serien er ikke-stationær indses også af udtrykket for den ubetingede varians, $\text{Var}(y_t) = \sigma^2 t$, der viser, at variansen for processen vokser med tiden.

Et vigtigt resultat, som er grundlaget for al asymptotisk teori relateret til integrerede processer, er at $T^{-1/2} y_t = T^{-1/2} \sum_{j=1}^t \varepsilon_j \xrightarrow{D} B(r)$, $r \in [0, 1]$ hvor $B(r)$ er en Brownsk bevægelse defineret på enhedsintervallet $[0, 1]$, se f.eks. Phillips (1987a). Grundlæggende er en standard Brownsk bevægelse, eller Wiener proces, en random walk; blot defineret i kontinuert tid. Asymptotisk teori for regressionsmodeller med integrerede processer indebærer, at

estimatorers og test-statistikkers grænsfordelinger kan udtrykkes ved komplicerede funktioner af Wiener processer, som kun i specieltfælde vil være identiske med Gaussiske fordelinger, se bl.a. Sims, Stock og Watson (1990). Som et eksempel kan vi betragte den såkaldte Dickey-Fuller (DF) regression, der er grundlaget for DF-testet for enhedsrødder, se Dickey og Fuller(1979). Regressionen, der blot er en omskrivning af (17), kan skrives som:

$$\Delta y_t = (\hat{\alpha} - 1)y_{t-1} + \hat{\varepsilon}_t, \quad (19)$$

hvor $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$. t -testoren, dvs. forholdet mellem $\hat{\alpha} - 1$ og standardafvigelsen på $\hat{\alpha}$ for hypotesen $H_0 : \alpha = 1$ overfor $H_1 : \alpha < 1$ har en asymptotisk fordeling, givet at ε_t ikke udviser autokorrelation, der kan beskrives ved udtrykket:

$$t_{\alpha-1} \xrightarrow{D} \frac{\int_0^1 B(r)dB}{(\int_0^1 B^2(r)dr)^{1/2}}. \quad (20)$$

Denne fordeling, der ofte benævnes DF-fordelingen, er en ikke-standard fordeling og er tabuleret i f.eks. Fuller (1976), samt i de fleste nyere lærebøger i tidsserie-økonometri, se Banerjee, Dolado, Galbraith og Hendry (1993), Davidson og McKinnon (1993), Hamilton (1994) og Hendry (1995).

DF-fordelingen er forskudt mod negative værdier sammenlignet med normalfordelingen. Det er klart, at for små stikprøver vil hverken DF-fordelingen eller normalfordelingen give en præcis beskrivelse af den eksakte fordeling. Flere forfattere har således defineret en klasse af processer benævnt *nearly integrated processes*, se f.eks. Phillips (1987b) og Haldrup og Hylleberg (1997). Ideen er at specificere en lokal enhedsrod, $\alpha = \exp(c/T) \approx 1 + c/T$, hvor c er en konstant, der beskriver afvigelsen fra enhedsrodstilfældet. En sådan proces er *mean-reverting* og selvom $\alpha \rightarrow 1$ for $T \rightarrow \infty$, er det muligt at udvikle en asymptotisk teori, der giver en forbløffende god beskrivelse af de eksakte fordelinger i selv små stikprøver. Hovedkonklusionen fra disse studier er, at selvom man ikke har en eksakt enhedsrod, vil tidsserier af en typisk længde med en høj grad af positiv autokorrelation have egenskaber, der ligger meget tæt på enhedsrodstilfældet. Det kan derfor være endog meget vildledende at benytte en normalfordelingsantagelse i små stikprøver, selvom de underliggende tidsserier strengt taget ikke har en rod lig en. Fra en pragmatisk synsvinkel er det således ikke spørgsmålet, om en rod er lig med en eller strengt mindre end en, der er det afgørende, men snarere om tidsserien udviser en 'høj grad' af persistens. I endelige stikprøver er det simpelthen ikke muligt at skelne imellem en enhedsrod og en *near unit root*.

En lang række problemer knytter sig til udførelse af enhedsrodtest i praksis, og det vil føre for vidt at komme ind på alle detaljer. Men det er altgørende at tage højde for eventuel autokorrelation i ε_t . Hvis ε_t udviser autokorrelation, vil fordelingen (20) ikke være korrekt. En forholdsvis simpel måde at korrigere for dette er at udvide regressionen (19) med et passende antal lags af Δy_t , indtil det resulterende fejlede ikke udviser autokorrelation. Dette test benævnes ofte det udvidede Dickey-Fuller test. Det er imidlertid en svær balancegang at finde en passende trunkering af den autoregressive model, idet styrken af DF-testet bliver kraftigt reduceret, hvis for mange lagkoefficienter inkluderes, mens størrelsen af testet, type I fejlen, bliver for stor, hvis for få lagkoefficienter er medtaget, således at fejleddet stadig er autokorreleret. Der findes også ikke-parametriske metoder i litteraturen til at imødekomme dette problem, se f.eks. Phillips (1987a) og Phillips og Perron (1988).

Et andet og ikke uvæsentligt problem er betydningen af deterministiske komponenter i modellen, se West (1988), Hylleberg og Mizon (1989), Haldrup og Hylleberg (1995, 1997), samt Haldrup (1996). Hvis alternativet til en enhedsrod er trend-stationaritet, d.v.s. tidsserien kan skrives som stationære afvigelser fra en lineær trend, skal man inkludere både konstant og trend i regressionsmodellen (19).

Der er i litteraturen udviklet mange andre test for enhedsrødder, og det vil føre for vidt at komme ind på disse. Men det er interessant at bemærke, at selvom styrken i forvejen ikke er alt for imponerende, vil DF-klassen af test for normal fordelte fejlede have en styrke der ligger rimelig tæt på ”*the power envelope*”, der angiver den højest opnåelige styrke i den pågældende situation, se Elliott, Rothenberg og Stock (1996).

Andre former for ikke-stationaritet end de ovenfor skitserede er fulgt i kølvandet af DF-testene. F.eks. udvikler Hasza og Fuller (1979) og Haldrup (1994) test for I(2). Processer integrerede af ordenen 2 synes specielt at karakterisere mange nominelle tidsserier, prisserier samt beholdningsvariable. Dickey, Hasza og Fuller (1984) samt Hylleberg, Engle, Granger og Yoo (1990) har udviklet test for enhedsrødder ved sæsonfrekvenserne for kvartalsdata. Ikke-stationaritet ved sæsonfrekvenserne forekommer typisk, hvis sæsonvariationen i data har et irregulært forløb, der ændrer sig over tiden. En sådan udvidelse er også motiveret af Box-Jenkins traditionen, hvor et hyppigt anvendt filter til at gøre en serie stationær er af typen $\Delta_4 = 1 - L^4$, hvor L er lag-operatoren. Et sådant filter kan dekomponeres som $\Delta_4 = (1 - L)(1 + L + L^2 + L^3) = (1 - L)(1 + L)(1 + L^2)$ og indebærer

altså 4 rødder med modulus 1: en ved nul-frekvensen, en for den halvårlig cyklus, samt to komplekse par for den helårige cyklus. I overensstemmelse med Dickey-Fuller testene kan man med udgangspunkt i en sådan dekomponering specificere en hjælperegression, hvor nul og sæsonfrekvenserne kan isoleres, således at rødderne ved de enkelte frekvenser kan testes for at have modulus en. Hypoteseprøvning i en sådan model er som for DF-testenes vedkommende ikke-standard, og mange af de praktiske problemer, som karakteriserer DF testene, er også relevante for test ved sæsonfrekvenserne.

Kointegration

Linearkombinationer af I(1) processer er normalt selv integrerede af ordenen 1, men hvis det viser sig, at nogle af de stokastiske trends er fælles, så vil visse linearkombinationer af serierne være integrerede af lavere orden, d.v.s. I(0). Når dette er tilfældet, er der tale om kointegration. Fra et estimations- og inferenssynspunkt er kointegration nødvendigt for at undgå spurious regression. Ofte tolkes kointegrationsssammenhænge som ligevægtsrelationer mellem økonomiske variable. Mange økonomiske teorier forudsiger, hvorledes sådanne sammenhænge måtte eksistere, givet at de underliggende variable har integrerede forløb. Men dette udelukker naturligvis ikke, at sammenhænge kan eksistere både imellem stationære og ikke-stationære variable. Som et eksempel på en simpel økonomisk model, antag at den lange rente R_t er bestemt som den tilbagediskonterede værdi af forventede fremtidige korte renter $r_{t+i}, i = 1, \dots, \infty$: $R_t = \theta(1 - \delta) \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i E_t r_{t+i}$. δ er diskonteringsfaktoren og θ er en proportionalitetsfaktor. Relationen kan omskrives til $R_t - \theta r_t = \theta \sum_{i=1}^{\infty} \delta^i E_t \Delta r_{t+i}$. Hvis det antages, at både R_t og r_t er I(1) processer, vil ΔR_t og Δr_t være I(0) og linearkombinationen $R_t - \theta r_t$ vil være I(0). R_t og r_t er altså kointegrerede. Bemærk, at R_t og r_t også kunne være henholdsvis en aktiekurs- og en dividendeserie, se afsnit 5 om finansiel økonometri.

Engle og Granger (1987) foreslår, at et test for kointegration kan konstrueres ved at udføre regression af variablene på hinanden for efterfølgende ved enhedsrodtest at afgøre om residualerne er I(0), kointegration, eller I(1), ej kointegration. Denne tilgang benævnes Engle-Granger 2-trins-metoden. Metoden synes dog efterhånden at være forældet og har kun sin gyldighed i særlige tilfælde. I praktiske anvendelser synes det at være en generel tendens at benytte den såkaldte *Johansen Maximum Likelihood procedure*, se Johansen (1988, 1991, 1995a), omend et utal af andre parametriske og ikke-parametriske teknikker er, og til stadighed bliver, udviklet. 'Johansen-

metoden' har en lange række attraktive statistiske egenskaber og har desuden en intuitivt forståelig fortolkning.

Udgangspunktet for analysen er at specificere en k 'te ordens VAR model for vektor-tidsserien X_t , der har dimensionen $p \times 1$. På fejlkorrigeringsform kan modellen skrives

$$\Delta X_t = \Pi X_{t-1} + \sum_{j=1}^k \Gamma_j \Delta X_{t-j} + v_t. \quad (21)$$

Der forudsættes normalfordelte fejllid, $v_t \sim N(0, \Omega)$. I praksis skal man således sikre, at VAR modellens trunkering, k , er valgt således, at de enkelte fejllid er velspecificerede, specielt er ikke serielt korrelerede, og at normalitetsantagelsen iøvrigt er opfyldt. I praksis kan det være et problem at k (og p) må vælges relativt lille af hensyn til stikprøvens størrelse. Rangen af matricen Π , der er af dimensionen $p \times p$, er bestemmende for de p variables kointegrationssegenskaber. Er rangen p , må alle serier være stationære, og er rangen 0, eksisterer der ingen kointegrationsssammenhæng, mens en rang, r mellem 0 og p indebærer, at der eksisterer r kointegrationsssammenhænge.

Det sidste tilfælde er det mest interessante; r kointegrationsrelationer er et udtryk for, at der blandt de p variable eksisterer r stationære ligevægtsrelationer. I et $I(1)$ system med r sådanne sammenhænge følger det, at antallet af *fælles stokastiske trends* er givet ved $p - r$. I dette tilfælde kan VAR-modellen i (21) reparameteriseres som

$$\Delta X_t = \alpha \beta' X_{t-1} + \sum_{j=1}^k \Gamma_j \Delta X_{t-j} + v_t, \quad (22)$$

hvor α og β er matricer af dimensionen $p \times r$. De r søjler i β er kointegrationsvektorerne og leddet $\beta' X_{t-1}$ er de r fejlkorrigeringsled. Tilpasningen i variablene ΔX_t finder sted via matricen α . Fra en økonomisk synsvinkel er det som oftest kointegrationsvektorerne β , der er interessante, men det kan også have interesse at vurdere, om elementer i α matricen er nul, således at der ikke finder tilpasning sted i de relevante variable i respons til sidste periodes afvigelser fra ligevægt målt ved $\beta' X_{t-1}$. Imidlertid er det et praktisk problem, at $\Pi = \alpha \beta'$, men ikke α og β matricerne er identificerede; kun rummene udspændt af søjlerne i α og β er identificeret, se Johansen og Juselius (1994). For at kunne tolke på de enkelte parametre er det derfor nødvendigt at pålægge identificerende restriktioner på α og β . Sådanne restriktioner må

findes ved hjælp af økonomisk teoretiske overvejelser, men selve den tekniske pålæggelse er ikke noget problem i eksisterende software programmer såsom PcGive 9.0, se Hendry og Doornik (1996) og CATS in RATS, se Hansen og Juselius (1994).

I praksis udføres kointegrationsanalyse ved først at bestemme kointegrationsrangen r for $\Pi = \alpha\beta'$. Dette gøres ved en teknik kaldet kanonisk korrelationsanalyse. De kanoniske korrelationskoefficienter mellem ΔX_t og X_{t-1} er blot de simple korrelationskoefficienter mellem linearkombinationer af elementerne i ΔX_t og X_{t-1} , således at den første kanoniske korrelationskoefficient er den største simple korrelationskoefficient, der kan findes, mens den anden kanoniske korrelationskoefficient er den næststørste o.s.v. Da de kvadrerede kanoniske korrelationer svarer til egenværdierne af matricen Π , og da rangen af en matrix er lig med antallet af egenværdier forskellig fra nul, er rangen lig med antallet af kanoniske korrelationskoefficienter forskellig fra nul. Da (21) også indeholder laggede værdier af ΔX_t , må man dog, forinden disse beregninger foretages, betinge på disse laggede værdier. Dette sker ved, at såvel ΔX_t som X_{t-1} regresseres på de laggede værdier af ΔX_t , hvorefter ΔX_t og X_{t-1} i beregningerne af de kanoniske korrelationer, erstattes af de respektive residualer fra disse regressioner.

De test, som Johansen (1988, 1991) har foreslået, følger multivariate versioner af Dickey-Fuller fordelingen og er derfor ikke-standard fordelinger. Egenvektorerne associerede med de r største egenværdier udspænder en basis for det r -dimensionale kointegrationsrum og estimeres med den superkonsistente rate $O_p(T)$, mod $O_p(T^{1/2})$ for stationære modeller. Et interessant og særdeles nyttigt resultat er, at når værdien af r er blevet bestemt, vil efterfølgende test kunne udføres som Likelihood-Ratio test, der alle er χ^2 -fordelte med et antal frihedsgrader lig antallet af overidentificerende restriktioner. Ud fra kendskab til antallet af kointegrationssammenhænge kan man altså betinge herpå og lave sædvanlig standard inferens.

Det duale problem til kointegrationsanalyse er analyse af de fælles stokastiske trends, der driver systemet. De stokastiske trends kan anskueliggøres på følgende måde. Den multivariate Wold representation for et kointegreret system er bestemt som $\Delta X_t = C(L)\varepsilon_t$, hvor $C(L)$ er et p dimensionelt matrix polynomium i lagoperatoren L . I niveau kan X_t skrives som

$$X_t = C \sum_{i=1}^t \varepsilon_i + Y_t \quad (23)$$

hvor Y_t er en stationær $I(0)$ proces, mens $C = \beta_{\perp}(\alpha'_{\perp}\Gamma\beta_{\perp})^{-1}\alpha'_{\perp}$, hvor $\Gamma =$

$I - \sum_{j=1}^k \Gamma_j$. '⊥' indikerer det ortogonale komplement af den relevante matrix, således at f.eks. α_{\perp} har dimensionen $p \times (p-r)$ og opfylder $\alpha'_{\perp} \alpha = 0$. De fælles stokastiske trends er givet som $\alpha'_{\perp} \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$ og har dimensionen $(p-r) \times 1$.

Til forskel fra kointegrationsssammenhængene er de stokastiske trends afhængig af det anvendte variablersæt, således at sættet af stokastiske trends ændres, hvis man f.eks. tilføjer en ny variabel til modellen, mens de kointegrationsssammenhænge, der er fundet i det oprindelige system, ikke ændres ved en sådan tilføjelse.

Identifikation af de fælles stokastiske trends kan have økonomisk relevans, idet disse er de grundlæggende faktorer for de øvrige variables udvikling over tid. De stokastiske trends har bl.a. betydning for identifikation af business cycles, se King, Plosser, Stock og Watson (1991) og kan benyttes til fastlæggelse af de faktorer, der driver forskellige sektorer af økonomien, se f.eks. Juselius (1994, 1996). Undertiden kan det have interesse at identificere stokastiske trends som linearkombinationer af de grundlæggende variable, se Gonzalo og Granger (1995), Granger og Haldrup (1997) samt Johansen (1997). I visse tilfælde er sådanne fortolkninger knyttet tæt sammen med begrebet *svag eksogenitet*, der er en betingelse for at kunne lave efficient inferens om parametrene i en betinget model, se Engle, Hendry og Richard (1983). Indenfor rammerne af den kointegrerede VAR model betyder svag eksogenitet m.h.t. langt-sigts parametrene β , at bestemte rækker i tilpasningsmatricen α er lig nul, således at kointegrationsrelationerne ikke indgår i ligningerne for de eksogene variable. En eksogen variabel vil derfor kunne fortolkes som værende blandt de stokastiske trends, der driver systemet.

Der kan foretages mange udvidelser af ovenstående grundmodel. Bidragene hertil er mange i litteraturen og er under stadig udvikling. F.eks. kompliceres analysen betragteligt ved at tillade deterministiske led i modellen (22), se Johansen (1994). Et stort antal artikler fokuserer på forskellige aspekter ved kointegrerede VAR modeller for I(2) variable, se bl.a. Johansen (1995b). Haldrup (1998) giver en nylig oversigt over disse bidrag. Endelig bør det nævnes, motiveret af enkeltligningsanalysen for sæsonkointegrerede systemer i Hylleberg, Engle, Granger og Yoo (1990), at teorien for VAR modeller for sæson-kointegrerede variable nu er udviklet, se Johansen og Schaumburg (1997), omend empiriske anvendelser endnu mangler i litteraturen.

4.2 Common features

Kointegration kan tolkes som en fælles egenskab, *co-feature*, for en vektor af integrerede tidsserier. Egenskaben, *featuren*, er, at de enkelte tidsserier er ikke-stationære, og altså er karakteriseret ved at have en stokastisk trend, se (23). Co-feature er, at bestemte linearkombinationer af serierne ikke indeholder stokastiske trends, således at nogle af de stokastiske trends for serierne er fælles. Kointegration er ét eksempel på en *common feature*, men generelt kan man naturligvis definere mange forskellige former for features, der potentielt kan være fælles for tidsserieprocesser. Engle og Kozicki (1993) samt Vahid og Engle (1993) har foretaget en sådan generalisering af kointegrationsbegrebet. Af eksempler på features kan nævnes seriekorrelation og konjunkturcykler, sæsonvariation, heteroscedasticitet, f.eks. autoregressivt betinget heteroscedasticitet, ARCH, excess-kurtosis, forskellige former for ikke-lineariteter, strukturelle skift m.v. Grundlæggende identificeres en feature ved at teste nul-hypotesen at ingen feature er tilstede for de enkelte serier, mens en co-feature indikeres ved et test, der finder, at linearkombinationer af variablene ikke har egenskaben.

Der findes efterhånden en del anvendelser af co-feature begrebet på forskellige typer af problemstillinger i litteraturen. Som et eksempel vil vi her illustrere ideen for tidsserier med fælles stokastiske cykliske og deterministiske sæson features, se Engle og Hylleberg (1996).

I praksis står man ofte overfor problemet, at mere end blot én egenskab karakteriserer tidsserier, og det kan derfor om muligt være af interesse at analysere hver egenskab i en fælles modelramme. I det aktuelle tilfælde kan det derfor have interesse at specificere en model, der både tillader sæsonvariation samt stokastiske trends. Et naturligt udgangspunkt er derfor VAR modellen (22), udvidet med variabelen z_t , der indeholder deterministiske sæsonled, f.eks. i form af sæson-dummy variable:

$$\Delta X_t = \alpha\beta' X_{t-1} + \sum_{j=1}^k \Gamma_j \Delta X_{t-j} + \Phi z_t + v_t \quad (24)$$

Leddene $\beta' X_{t-1}$ indeholder de r fejlkorrektionsled, de laggede ΔX_t 'er beskriver stokastisk sæson og anden cyklisk variation, mens z_t beskriver deterministisk bestemt sæsonvariation. X_t er af dimensionen $p \times 1$, mens z_t er $m \times 1$. D.v.s. at α, β, Γ_j og Φ har dimensionerne $p \times r$, $p \times r$, $p \times p$, og $p \times m$.

Man siger, at en deterministisk sæson feature vil være tilstede for en variabel i X_t , hvis elementer i den relevante række i Φ -matricen er forskellig fra

nul. En deterministisk sæson co-feature eksisterer, når linearkombinationer ikke har egenskaben. I så tilfælde eksisterer der en $p \times s$ matrix δ , således at $\delta'\Phi = 0$. Rangen af Φ må i dette tilfælde være lig $q = \min\{p - s, m\}$, hvilket indebærer at Φ -matricen kan skrives som et produkt af to matricer $\Phi = \gamma\eta'$, hvor γ og η er $p \times q$ og $m \times q$. Som for kointegrationsanalyse indeholder rangen af Φ information om antallet af co-features. I praksis er man interesseret i det ortogonale komplement til γ således at $\gamma'_\perp\gamma = 0$ og derfor $\gamma'_\perp\Phi = 0$, jf. ligning (24). Matricen γ_\perp har dimensionen $p \times (p - q)$, hvorfor antallet af deterministiske sæson co-features er $p - q$.

Som ved bestemmelse af kointegrationsrangen sker rangbestemmelsen ved kanonisk korrelationsanalyse; i dette tilfælde mellem ΔX_t og z_t efter at korrektion for betydningen af $\beta'X_{t-1}$ og laggede værdier af ΔX_t er foretaget. Tiao og Tsay (1989) har udviklet den statistiske teori for en sådan analyse. De kanoniske korrelationer kan findes som beskrevet ovenfor ved gennemgangen af kointegrationsanalysen. De mindste kanoniske korrelationer, der er kvadrateret på de mindste egenverdier, indikerer tilstedeværelsen af co-features, mens egenvektorerne svarende til de største egenverdier angiver netop de linearkombinationer af ΔX_t , der har den maksimale deterministiske sæsonvariation.

Analyse af stokastisk sæson co-features og common cycle features kan foretages på en helt analog måde. Rang betingelserne, der skal være opfyldt i dette tilfælde, er bestemt ud fra $\Lambda\Gamma_j = 0$ for $j = 1, \dots, k$, og $\Lambda\alpha = 0$, hvor Λ er $w \times p$. Nulrummet for Γ_j og α har dimensionen w og er altså udspændt af de samme vektorer. D.v.s. at når (24) ganges igennem med Λ forsvinder de første to led i VAR modellen, således at modellen reduceres til

$$\Lambda\Delta X_t = \Lambda\Phi z_t + \Lambda\varepsilon_t, \quad (25)$$

og featuren dermed forsvinder. Kanonisk korrelationsanalyse kan også anvendes på denne problemstilling.

4.3 Ikke-lineære modeller

De fleste standard teknikker til analyse af økonomiske tidsserier tager udgangspunkt i lineære modeller. I langt de fleste tilfælde synes en sådan beskrivelse at være ganske velegnet, selvom der naturligvis er tale om en første ordens approksimation til en langt mere kompliceret og muligvis ikke-lineær interaktion mellem økonomiske tidsserier. I ikke-lineær tidsserieanalyse er

det imidlertid få bidrag, der har fået en gennemslagskraft på højde med de tidsseriebidrag, der er gennemgået ovenfor. Et af problemerne er, at ikke-lineariteter kan tage et utal af forskellige former, og det er meget sjældent, at man med hjælp fra økonomisk teori kan reducere denne mangfoldighed af mulige modeller. Der bliver således nemt tale om et kapløb for at producere fleksible funktionelle former med et godt 'fit', men som erfaringsmæssigt er aldeles uegnede til f.eks. forudsigelser.

Der findes mange typer af test for ikke-linearitet i litteraturen, se Granger og Teräsvirta (1993) og Tong (1990) for oversigter. Grundlæggende kan linearitets-test inddeles i to hoved-kategorier: test med et ikke-specificeret alternativ og test formuleret overfor et specifikt alternativ. Det velkendte RESET test, der kan tolkes som et LM test, er et eksempel fra den første kategori af test. Ofte formuleres den sidste type af test også som LM test, hvilket er særdeles nyttigt, idet estimation af modellen under alternativet ikke er nødvendigt samtidig med, at man vinder styrke overfor det konkrete alternativ. Dog besværliggøres udførelse af LM test ofte af, at modellen under nul-hypotesen er uidentificeret, og estimation derfor ikke kan foretages. Da sådanne test også har styrke overfor mange andre former for ikke-linearitet, er forkastelse af nulhypotesen naturligvis ikke ensbetydende med accept af alternativhypotesen. I praksis vanskeliggør dette valget af specification, når der findes flere konkurrerende ikke-lineære modeller. Et ikke-klassisk test, der er blevet særdeles populært til detektion af ikke-linearitet, er det såkaldte BDS test, se Brock, Dechert, og Scheinkman (1987). Specielt til analyse af lange finansielle tidsserier har testet været anvendt til at påpege, at ikke-lineariteter findes i data. I det hele taget synes mange empiriske studier at pege i retningen af, at ikke-linearitet er en empirisk regularitet for de fleste økonomiske tidsserier, selvom formen af denne ikke er velspecificeret.

De fleste teoretiske bidrag i litteraturen har fokuseret på univariate modeller, men for økonomer er multivariate modeller generelt af langt større interesse. Det er imidlertid svært at bevæge sig fra generelle univariate modeller til multivariate systemer. En mulig tilgang er at definere ikke-lineære features for univariate tidsserier og søge efter mulige ikke-lineære co-features, jf. diskussionen ovenfor og Anderson og Vahid (1998). Som eksempler på ikke-lineære multivariate modeller, der faktisk er blevet analyseret i empiriske studier, kan nævnes: Generelle ikke-lineære autoregressive modeller, *smooth transition* autoregressive modeller, bilineære modeller samt *random coefficient* modeller, se Granger og Teräsvirta (1993) for en oversigt og nærmere beskrivelse af disse typer af modeller. Der findes endvidere eksempler

på ikke-lineære fejlkorrektionsmodeller, hvor man specielt har forsøgt at modellere asymmetrisk tilpasning som reaktion på ligevægtsfejl i kointegrerede systemer, se Ericsson, Hendry og Prestwich (1997), Granger og Lee (1989) og Granger og Haldrup (1997).

I naturvidenskaberne, har der været megen debat om kaotiske processer. Kaos-processer er rent deterministiske processer, der har egenskaber, som gør dem svære at skelne fra stokastiske processer. Der har været forsøg på at overveje en sådan mulighed også for økonomiske tidsserier, specielt finansielle tidsserier, der normalt er meget lange sammenlignet med makroøkonomiske tidsserier. Empiriske studier synes dog ikke at kunne finde tegn på 'kaotiske tilstande'. Der kan være mange forklaringer på dette, men et af de væsentligste problemer er, at økonomiske tidsserier indeholder et ikke ubetydeligt 'støj'-element, f.eks. i form af målefejl, som besværliggør empirisk testning.

Et af de bidrag indenfor ikke-lineær tidsseriemodellering, der har stimuleret forskningen empirisk såvel som teoretisk, er de såkaldte *Markov switching regime* modeller. Strukturelle skift modelleres traditionelt som værende deterministisk bestemte. Alternativt kan man forestille sig, at regime-skift følger en stokastisk proces: Hvis den underliggende proces har ændret sig i fortiden, hvorfor skulle den så ikke kunne ændre sig i fremtiden? Dette forhold bør der naturligvis tages højde for, f.eks. i forbindelse med *forecasting*. Dette er ideen bag Hamilton's (1989) switching regime modeller. Hamilton antog, at økonomien kan befinde sig i to forskellige regimer, højkonjunktur eller lavkonjunktur, og at skiftet mellem disse er forårsaget af uobserverbare (latente) faktorer modelleret som en Markov-kæde. I en *two-state* Markov kæde, hvor tilstanden s_t kan antage værdierne 1 eller 2, er det således af interesse at estimere transitionssandsynlighederne $P\{s_t = j | s_{t-1} = i\} = p_{ij}$ for $i, j = 1, 2$, hvor p_{ij} angiver sandsynlighederne for at bevæge sig mellem de forskellige tilstande betinget på tilstanden i sidste periode. Det vil naturligvis gælde, at $p_{i1} + p_{i2} = 1$ for $i = 1, 2$. Modellen, som Hamilton analyserede for BNP, y_t , er af formen

$$y_t - \mu_{s_t} = \phi_1(y_{t-1} - \mu_{s_{t-1}}) + \phi_2(y_{t-2} - \mu_{s_{t-2}}) + \phi_3(y_{t-3} - \mu_{s_{t-3}}) + \phi_4(y_{t-4} - \mu_{s_{t-4}}) + \varepsilon_t$$

hvor $\varepsilon_t \sim i.i.d.N(0, \sigma^2)$. Modellens parametre $\{\mu_i, \phi_i, p_{ij}, \sigma^2\}$, $i, j = 1, 2$ kan estimeres ved Maximum Likelihood metoden. Af særlig interesse er at kunne bestemme sandsynligheden for at befinde sig i den ene eller den anden tilstand for hvert tidspunkt t samt den forventede varighed af de enkelte tilstande, $1/(1 - p_{ii})$. Den grundlæggende Markov switching model kan udvides i mange

hensender. Mange multivariate generaliseringer findes allerede i litteraturen og f.eks. kan man tillade flere end to tilstande i Markov-kæden, der driver regime skiftene. Eventuelt kan man lade antallet af tilstande N være en størrelse, der skal estimeres, ligesom de enkelte tilstande i Markov processen kan afhænge af de basale økonomiske variable.

4.4 Fremtidig udvikling i tidsserieøkonometri

Teorien for repræsentation, estimation og test for integrerede og kointegrerede tidsserier synes efterhånden at være udviklet, men man vil dog stadig se udvidelser i nogle retninger i de kommende år. Specielt forventes det, at analyse og identifikation af de fælles stokastiske trends, der driver økonomien, vil få en øget interesse.

Common-feature begrebet har potentielt mange anvendelsesmuligheder. Der findes en lang række forskellige situationer, hvor dette begreb har sin relevans, og udvikling af nye estimations- og testprocedurer til analyse af forskellige features vil blive udviklet. Common features litteraturen er endnu ikke færdigudviklet, og der vil utvivlsomt i de kommende år blive foreslået nye estimations- og testprocedurer til analyse af mange forskellige former for features, der potentielt karakteriserer økonomiske tidsserier. Der synes ligeledes at være et behov for udvikling af teori til repræsentation, parametrisation samt dekomposition af common feature modeller. Ligeledes vil man se et voksende antal empiriske anvendelser af denne teknik.

Med hensyn til ikke-lineær tidsrækkeanalyse vil man formentlig se en stigning i udviklingen af teoretiske resultater, og forhåbentlig vil disse bidrag være af en form som vil være anvendelig for praktisk empirisk arbejde. Hamilton's markov-switching modeller har givet én metode til udviklingen af ikke-lineære modeller med store anvendelsesmæssige muligheder. Denne model er således under stadige udvidelser med hensyn til specifikation, forecasting, misspecifikationstest m.v. og de kommende år vil utvivlsomt give mange nye bidrag der vil forbedre vores forståelse for sammenhænge i økonomier under stadig forandring. Det kunne være nyttigt, om tilsvarende nye teoretiske landvindinger ville kunne hjælpe os til en bedre forståelse af de ikke-lineære sammenhænge i økonomiske tidsserier.

5 Finansiell økonomometri

Finansiering som akademisk disciplin begyndte for alvor at udvikle sig efter publiceringen af Modigliani og Millers (1958) artikel—paradoksalt nok den artikel der demonstrerede finansieringens irrelevans! Feltet fik yderligere skub fremad med fremkomsten af prisfastsættelsesmodeller for aktier i treserne, for optioner i halvfjerdsene, og for obligationer i firserne. I dag har finansiering indtaget sin plads som et centralt område i økonomi.

Finansiell økonomometri har udviklet sig hånd i hånd med teorien, idet de tidlige modeller mere eller mindre har haft regressionsformat, selv i den teoretiske formulering, mens de nyeste modeller er særdeles komplekse og kræver brug af sofistikerede økonomiske metoder.

I det følgende diskuteres de økonomiske problemstillinger i modeller for aktier, obligationer, optioner og volatilitet. Endelig opridses visse sandsynlige fremtidige trends.

5.1 Aktier

I en vis forstand er aktien den simpleste type aktiv i finansiering. Der er ingen bestemt udløbsdato eller lignende. Aktiens prisfastsættelse er dog tilsvarende vanskelig, da potentielt alt, hvad der foregår i virksomheden, skal tages i betragtning.

Statiske modeller

Lad os betragte et marked med N aktier og en risikofri obligation med rente r_f . Investor antages at være risikoavers, hvor risiko måles ved variansen på porteføljeafkastet. Hvis investor vælger porteføljevægte, så risikoen minimeres under den bibetingelse at det forventede afkast mindst er på et vist reservationsniveau, r_f , er førsteordensbetingelsen givet ved

$$\mu_i - r_f = \beta_i(\mu_p - r_f), \quad (26)$$

hvor μ_p er det forventede porteføljeafkast, $\mu_i, i = 1, 2, \dots, N$ er det forventede afkast på den i 'te aktie og β_i angiver regressionskoefficienterne for de enkelte aktieafkast på porteføljeafkastet. Altså, aktieafkastet, målt som en præmie over renten, er direkte proportionalt med aktiens β -værdi, β_i , og proportionalitetskonstanten eller risikoprisen er den tilsvarende præmie for porteføljen. Dette resultat skyldes Markowitz (1959).

I ligevægt må (26) holde for markedsporteføljen bestående af alle udestående aktiver. Dette er *Capital Asset Pricing Modellen*, CAPM, se Sharpe (1964).

Den samme restriktion mellem forventet afkast og risiko kan fås ved blot at appellere til fravær af arbitragemuligheder. Dette er Ross' (1976) *Arbitrage Pricing Theory*, APT. Den holder tillige for multiple faktorer, nemlig hvis enkeltaktivernes afkast r_1, \dots, r_N genereres af fælles faktorer f_1, \dots, f_K i en lineær faktormodel, hvor APT restriktionen har formen

$$\mu_i - r_f = \sum_{j=1}^K \beta_{ij} \lambda_j \quad (27)$$

for passende risikopriser λ_j . Her er β_{ij} regressionskoefficienten i regressionen af r_i på f_j . Hvis f_j svarer til afkastet på en handlet portefølje er $\lambda_j = E(f_j) - r_f$.

Vi har allerede set, at 'beta' er en regressionskoefficient, så mulige estimationsmetoder ligger lige for. Data vil typisk være afkast for mange aktier og mange tidsperioder, dvs. paneldata af formen $(r_{11}, \dots, r_{N1}, \dots, r_{NT})$, hvor N er antal aktier og T antal perioder.

Der skal nu foretages en række valg. For det første, er 'faktorerne', regressorerne, observerede eller uobserverede? Det simpleste tilfælde er, at man har data (r_{p1}, \dots, r_{pT}) på markedsporteføljen, hvorved mikroøkonometrien fra afsnit 3 kan anvendes. Imidlertid er det svært at sige, hvor mange aktiver man i praksis skal lade indgå her, og teorien holder kun hvis man medtager alle, hvilket er umuligt—dette er Rolls (1977) kritik. I stedet kan man betragte faktorerne som uobserverbare og bruge faktoranalyse, se Chen, Roll og Ross (1986) eller en mere generel LISREL-model til at estimere 'beta', se afsnit 6.

For det andet, skal man bruge en et-trins eller en to-trins procedure? I en to-trins procedure estimerer man først alle β_i , f.eks. ved regression over tid for hver enkelt aktie, eller ved faktor analyse. Dernæst regresserer man gennemsnitlige, over tid, afkast \bar{r}_i på de estimerede værdier for β_i for at bestemme risikoprisen. I en et-trins procedure pålægges teorirestriktionen, CAPM eller APT, fra starten, dvs. 'beta' og risikoprisen estimeres samtidig.

For det tredje skal man afgøre, om faktorerne svarer til handlede aktiver, og for det fjerde skal man afgøre, om der findes et risikofrit aktiv, som i fremstillingen ovenfor, ellers må r_f estimeres.

Et-trins proceduren ses at være en fuld-informations procedure og kan dermed forventes at være mere efficient end to-trins proceduren. Under ganske bestemte betingelser viser Shanken (1992), at to-trins proceduren kan

være ligeså efficient som et-trins proceduren, men Christensens (1994) resultat er, at så snart man tillader uobserverbare faktorer, jf. Rolls kritik, er kun et-trins proceduren fuldt efficient.

Det ses, at den teoretiske restriktion i det tilfælde, hvor der eksisterer en risikofri rente, er, at konstantleddet i regressionen er nul for hvert aktie. Med data på både de enkelte aktier og på markedsporteføljen er modellen uden restriktionen et SURE system, Seemingly Unrelated Regressions Equations, men da regressorerne er de samme, konstantleddet og markedsporteføljen, i alle ligninger, kan systemet estimeres ligning for ligning. Herefter kan testet for, om alle konstantled er nul udføres som et Wald test. Under en normalfordelingsantagelse følger testet en eksakt F -fordeling under nulhypotesen, og en ikke-central F -fordeling under alternativet, at konstantleddet ikke er nul, hvorved styrkefunktionen kan beregnes eksakt. Dette approach skyldes Gibbons, Ross og Shanken (1989). Generelt er testet et asymptotisk χ^2 -test.

Dynamiske Modeller

Lad os betragte en repræsentativ agent, der maximerer sin forventede diskonterede nytte over en uendelig tidshorisont.

De stokastiske Euler ligninger, se Lucas (1978) og afsnit 2 ovenfor, er

$$\delta E_t \left(\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} (1 + r_{i,t+1}) \right) = 1. \quad (28)$$

Igen er $r_{i,t}$ afkastraten til tid t på det i 'te aktiv. Endvidere har investor subjektiv tidspræferenceparameter eller diskonteringsfaktor δ og marginalnytte u' , c_t er forbruget, og E_t indikerer den betingede middelværdi, givet al information til og med periode t . Modellen betegnes ofte som den intertemporale CAPM (ICAPM) og generaliserer Halls (1978) forbrugsmodel.

Under en mere generel ikke-arbitrage antagelse gælder tilsvarende, at

$$E_t \left(\frac{m_{t+1}}{m_t} (1 + r_{i,t+1}) \right) = 1, \quad (29)$$

hvor m_t er en positiv stokastisk proces. Når (29) er opfyldt, kaldes m_t en tilstandsprisdeflator, men den kendes også som priskernen eller tætheden for martingalmålet, og Euler ligningerne er specialtilfældet $m_t = \delta^t u'(c_t)$. De foregående statiske modeller, CAPM og APT, fremkommer ligeledes som specialtilfælde af denne generelle specifikation.

Hansen og Singleton (1982) viser, hvordan man kan bruge Hansens (1982) Generalized Method of Moments, GMM, se afsnit 2, til at teste Euler ligningerne uden at specificere fordelingen af diverse stokastiske størrelser som

forbruget og afkastene. Man behøver kun at estimere præferenceparametrene, dvs. δ og evt. ukendte parametre i nyttefunktionen. Her benyttes almindeligvis en specifikation med konstant relativ risikoaversion, γ , som $u(c) = (c^{1-\gamma} - 1)/(1 - \gamma)$. Herved tager Eulerligningerne for hver enkelt aktie formen (2). Dette har den yderligere fordel, at forbruget kun indgår gennem vækstraten c_{t+1}/c_t , nemlig som $m_{t+1}/m_t = \delta(c_t/c_{t+1})^\gamma$, så stationaritet er lettere at verificere. Det ses fra l'Hospitals regel at logaritmisk nytte er specialtilfældet $\gamma = 1$. Hermed tager modellen formen

$$E_t(g(x_{t+1}, \theta)) = 0, \quad (30)$$

hvor $x_{t+1} = (r_{1,t+1}, \dots, r_{N,t+1}, c_t/c_{t+1})$ er data og $\theta = (\delta, \gamma)$ parametervektoren.

Det ses, at $g_{t+1} = g(x_{t+1}, \theta)$ er et risikojusteret afkast, som er ortogonalt til al information til og med tid t . Specielt fås $E_t(g_{t+1}g_t) = 0$, hvorved man ved hjælp af sætningen om itererede middelværdier får, at $E(g_{t+1}g_t) = 0$, dvs. de risikojusterede afkast er serielt ukorrelerede, og det er denne implikation af modellen, der testes.

Hvis aktiekursen følger en random walk, er afkastene serielt ukorrelerede og dermed uforudsigelige ud fra deres egen fortid. Undertiden opfattes random walk tests for, om autokorrelationsfunktionen for afkastene er nul, som tests for markedsefficiens. Det følger imidlertid fra Eulerligningen, at med risikoaversion, $\gamma > 0$, er det g_t og ikke afkastene selv, der er serielt ukorrelerede under efficiens.

Hvis z_t er en vektor af instrumentvariable, som er kendt til tid t , kan vi som i afsnit 2 gange z_t på hvert element i g_{t+1} og herved få en udvidet vektor h_{t+1} . Ved hjælp af itererede middelværdier fås $E_t h_{t+1} = 0$. Dermed er også h_t serielt ukorreleret, og bruger vi itererede middelværdier endnu en gang, fås $E h_{t+1} = E(E_t h_{t+1}) = 0$, altså h_t har middelværdi nul.

GMM estimatet for θ vælges, så stikprøvegennemsnittet \bar{h} af h_t 'erne er nul, dvs. modelrestriktionen er opfyldt. Hvis h_t har flere elementer end θ , minimeres normen af \bar{h} med hensyn til θ som i (3), med S_T givet ved identitetsmatricen. Herefter indsættes estimatet $\hat{\theta}$ i h_t , og variansen V af \bar{h} kan estimeres som stikprøvevariansen af h_t 'erne, delt med antallet af tidsperioder. Den efficiente GMM estimator fås ved at minimere normen af \bar{h} , nu med vægtmatrix $S_T = V^{-1}$. Eulerligningerne, d.v.s. hypotesen om markedsefficiens, testes ved at betragte den minimerede værdi som en asymptotisk χ^2 -størrelse med antal frihedsgrader lig forskellen mellem dimensionen af \bar{h} og θ .

Bemærk, at det er simpelt at estimere V , fordi modellen siger, at h_t er serielt ukorreleret. Hvis man er usikker på dette, kan man korrigere V for seriel korrelation som i Newey og West (1987). Her bør man dog huske, at det netop er nulhypotesen om, at h_t 'erne er ukorrelerede, man tester.

Paradigmer og Paradokser

Lad os skrive afkastraten som $r_{i,t+1} = (p_{i,t+1} + d_{i,t+1} - p_{i,t})/p_{i,t}$, hvor p står for pris og d for dividende. I disse simple ligevægtsmodeller (28) er forbruget lig med summen af dividenderne, $c_t = \sum_i d_{i,t}$. Det er værd at bemærke, hvad der sker i det risikoneutrale tilfælde, hvor $\gamma = 0$, hvis $N = 1$, dvs. at der kun er et aktiv. Hvis dividenden er konstant fås at $p_t = d_t/\rho$, hvor ρ er tidspræferenceraten, dvs. $\delta = 1/(1 + \rho)$. En stokastisk version af denne proportionalitet gælder i tilfældet, hvor dividenderne er stokastiske og har en enhedsrod. I dette tilfælde har prisen også en enhedsrod, men de to processer er kointegrerede, idet

$$p_t = \frac{d_t}{\rho} + u_t \quad (31)$$

hvor u_t er stationær, Campbell og Shiller (1987). Således kan hele begrebsapparatet fra den ikke-stationære tidsrækkeanalyse nu bringes i sving, se afsnit 4.

For mere generelle nyttefunktioner anvendes i stedet de tidligere beskrevne metoder, GMM eller ML, se afsnit 2 om økonometrisk teori. I praksis viser det sig, at den estimerede værdi af γ ofte er ekstremt høj, f.eks. 20 eller 30, når de betragtede aktiver indeholder både aktier og obligationer. Der er imidlertid ikke mange, der tror på, at repræsentative investorer i virkeligheden udviser så stor grad af risikoaversion. Dette paradoks kaldet *the equity premium puzzle*, se Mehra og Prescott (1985), skyldes, at aktier historisk set har haft langt højere gennemsnitligt afkast end obligationer, og dette kan kun forklares i ligevægt, hvis investorerne kræver en stor præmie for at acceptere den øgede risiko forbundet med aktieinvestering. Når nyttefunktion er additiv over tid, er både den relative risikoaversion og den intertemporale substitutionselasticitet lig γ . Ved at bruge en mere generel nyttefunktion, der ikke er separabel i tid, forklarer Epstein og Zin (1989) en del af, men ikke hele, dette paradoks.

Et relateret paradoks, *the excess volatility puzzle*, se Shiller, (1981), er, at priserne har langt højere stikprøvevariation over tid end dividenderne, selv efter at man kontrollerer for den forskel, som f.eks. proportionalitetskonstanten

ρ^{-1} i (31) og tilsvarende teoretiske forklaringer i tilfældet med risikoaversion kan give. Dette paradoks er dog heller ikke endeligt løst.

Kontinuert tid

Udover de statiske modeller og de dynamiske modeller i diskret tid anvendes i finansiering dynamiske modeller i kontinuert tid. Aktiekursen S_t antages her at følge den stokastiske differentiallyingning

$$dS_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t, \quad (32)$$

hvor μ_t er driften, σ_t volatiliteten til tid t , og dW_t er ændringerne i en Wienerprocess eller Brownsk bevægelse W_t , en random walk i kontinuert tid, dvs. til forskellige tidspunkter giver dW_t uafhængige normalfordelte stød. Hvis der ikke var nogen stokastik var aktiekursen simpelthen løsningen til den sædvanlige differentiallyingning $dS/dt = \mu_t$. Når stokastikken indføres, er der tillige støjleddet $\sigma_t dW_t$ i kursændringen.

Hvis man yderligere specificerer, at driften og volatiliteten tager formen $\mu_t = \mu S_t$ og $\sigma_t = \sigma S_t$, med konstante koefficienter μ og σ , fås

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t. \quad (33)$$

På venstresiden har vi afkastraten. Det ses, at μ angiver middelaflkastet, og σ^2 variansen på aflkastet. Denne model for S_t kaldes en geometrisk Brownsk bevægelse og er en vigtig grundmodel i finansiering i kontinuert tid. Den er et eksempel på en diffusionsmodel. Generelt siges S_t at være en diffusion, hvis μ_t og σ_t kun er, evt. tidsafhængige, funktioner af S_t , men ikke af andre stokastiske faktorer eller tidligere kurser.

Geometrisk Brownsk bevægelse er i en vis forstand den kontinuerte model, der passer bedst med de diskrete modeller CAPM og APT, idet modellerne har det til fælles, at middelaflkastet og variansen ikke afhænger af kursniveauet. En CAPM i kontinuert tid er udledt af Merton (1973a).

Estimation og inferens er naturligvis altid baseret på diskrete observationer S_1, S_2, \dots, S_T . Man kan derfor spørge, hvorfor modellen overhovedet formuleres i kontinuert tid, når den alligevel skal diskretiseres i den empiriske analyse. Normalt kan man jo få stort set de samme egenskaber frem i diskret og kontinuert tid i videnskabelige modeller, dvs. man har frit valg i modelleringsfasen. Specielt i finansiering gælder det dog, at teorien faktisk er noget anderledes i kontinuert tid. Hvis kurserne til et givet fremtidigt tidspunkt følger en kontinuert fordeling, er der uendeligt mange mulige udfald.

Med endeligt mange (N) handlede aktiver er der altså ikke et komplet sæt af Arrow-Debreu aktiver. Hvis modellen formuleres i diskret tid, betyder dette, at flere forskellige priskerner kan forklare de givne priser her og nu. Hvis et nyt aktiv skal introduceres, vil dets pris afhænge af, hvilken af disse priskerner man vælger, men man har ikke nogen basis for at vælge en fremfor en anden. Man kommer udover dette problem i kontinuert tid, idet markedet selv med endeligt mange handlede aktiver under visse betingelser er dynamisk komplet, dvs. ved at handle aktiverne i kontinuert tid kan man effektivt generere et komplet marked. Hermed er priskernen entydigt fastlagt.

For en geometrisk Brownsk bevægelse (33) er maximum likelihood estimaterne for middelaflkastet og variansen

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t \text{ og } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \hat{\mu})^2 \quad (34)$$

hvor $r_t = \log S_t - \log S_{t-1}$ er den kontinuerte afkaststrate.

Modellen forudsætter, at afkastene er serielt ukorrelerede, hvilket kan testes på sædvanlig vis. Alternativt kan man, se Lo og MacKinlay (1988), udnytte at variansen på afkastet $\log S_t - \log S_{t-2}$ over 2 perioder er $2\sigma^2$ under H_0 . Et variance-ratio test af random-walk hypotesen kan derfor udformes som $\hat{\sigma}_2^2 / (2\hat{\sigma}^2)$, hvor $\hat{\sigma}_2^2$ er baseret på 2-periode afkastene. Vi ved dog fra Eulerligningen, at dette kun er et test for markedsefficiens under risikoneutralitet.

Naturligvis studerer man også i kontinuert tid modeller, hvor afkastene ikke er ukorrelerede. En populær generaliseret model er

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t^\gamma dW_t . \quad (35)$$

For $\gamma = 1$ er dette en geometrisk Brownsk bevægelse, mens $\gamma < 1$ svarer til at afkastenes volatilitet $\sigma S_t^{\gamma-1}$ stiger voldsomt når kursen går mod nul. En sådan niveaueffekt, introduceret af Black (1976), kan skyldes øget risiko i forbindelse med en truende fallit. En approksimerende diskret model er

$$S_t - S_{t-1} = \mu S_{t-1} + \sigma S_{t-1}^\gamma \epsilon_t . \quad (36)$$

Hvis man f.eks. lader ϵ_t være identisk uafhængig standard normalfordelt, svarende til dW_t , kan man opstille simple estimations- og inferensprocedurer. En mulighed er at isolere residualen ϵ_t i (36) og minimere summen af de kvadrerede residualer. Denne metode leder dog ikke til en korrekt ML

procedure i overensstemmelse med den kontinuerte model, men kan være en nyttig tilgang i praksis.

En anden generalisering er at tillade spring i processen, men det leder til vanskelige estimationsproblemer.

5.2 Obligationer og rentestruktur

Lad os for nemheds skyld betragte statsobligationer, dvs. at vi antager, at alle betalinger falder med sikkerhed.

For den teoretiske modellering er det også bekvemt at indføre nul kuponobligationer. Lad $p(t, T)$ være prisen til tid t på en obligation, der betaler 1 kr. til tid T , hvor $T > t$. Prisen på en kuponbærende obligation er da givet ved

$$P = \sum_{s=t}^T C_s p(t, s) , \quad (37)$$

hvor C_s angiver kuponer og andre betalinger. En prisfastsættelsesteori for nul kuponobligationer er dermed tilstrækkelig.

Afkastet fra t til T på den nul kuponobligation, der udløber til tid T , er netop $1/p(t, T)$, så med en priskerne m_t som i (29) fås

$$p(t, T) = E_t\left(\frac{m_T}{m_t}\right) . \quad (38)$$

Dermed svarer analysen af priskerner til analysen af rentestrukturen til tid t givet ved nul kuponpriserne $p(t, T)$, for alle $T > t$, eller, ækvivalent, ved alle de tilsvarende spotrenter eller forwardrenter. I kontinuert tid har vi sammenhængen

$$p(t, T) = e^{-(T-t)r_{t,T}} = e^{-\int_t^T f_{t,s} ds} , \quad (39)$$

hvor $r_{t,s}$ og $f_{t,s}$ er spot- og forwardrenten svarende til udløbsdato s .

Enten p , r eller f skal modelleres. Heath, Jarrow og Morton (1992) (HJM) specificerer

$$df_{t,T} = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t , \quad (40)$$

og udleder arbitragebetingelsen

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T)(\lambda(t) + \int_t^T \sigma(t, s)' ds) . \quad (41)$$

For mange formål, specielt prisfastsættelse af afledte aktiver, kan man sætte risikoprisen λ lig nul, og i dette tilfælde ses det at forwardrenteprocessen er

fuldstændig specificeret ved volatiliteten. Det simpleste eksempel er Ho og Lee (1986) modellen, hvor σ er af dimension 1 og konstant.

I stedet for direkte at modellere hele forwardrentekurvens udvikling kan man blot modellere den korte rente $s_t = r_{t,t}$, og så få resten af rentestrukturen med vha. sammenhængen

$$p(t, T) = E_t^Q e^{-\int_t^T s_u du} . \quad (42)$$

Her tages middelværdien med hensyn til et passende sandsynlighedsmål Q , der i modsætning til ovenfor gør $p(t, T) / \exp(\int_0^t s_u du)$ til en martingal, mens man i (38) har, at det er $p(t, T) m_t$ der er en martingal.

Det mest kendte eksempel på en kort-rente model er Cox, Ingersoll og Ross (1985) (CIR) modellen

$$ds_t = \kappa(\theta - s_t)dt + \sigma\sqrt{s_t}dW_t . \quad (43)$$

Det ses, at i CIR modellen er variansen proportional med renten, og processen udviser mean-reversion med hastighed κ mod langsigtsniveauet θ .

Man ser ofte figurer, der viser rentestrukturen på en given dag. Sådanne rentestrukturer bruges af banker og andre finansielle institutioner til prisfastsættelse, hedging m.m.. Figurerne er baseret på bestemte funktionelle former, f.eks. Nelson og Siegels (1987) (NS) model for forwardrenten $f_{t,T} = \theta_1 + \theta_2 e^{-\theta_3(T-t)} + \theta_4(T-t)e^{-\theta_3(T-t)}$. Parametervektoren $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ reestimeres hver dag. Her er metoden at bruge udtrykket for f som funktion af θ til at skrive nul kuponpriserne i (39) som funktion af θ , og derefter som i (37) at skrive alle de observerede (ofte kuponbærende) obligationer som funktioner af nul kuponpriserne og dermed θ . Nu estimeres parameteren i den ikke-lineære regression $P_i = P_i(\theta) + \epsilon_i$, hvor $P_i(\theta)$ er de resulterende funktioner, og P_i er de observerede priser den givne dag, dvs. der er tale om en tværsnitsanalyse.

Den således estimerede rentestruktur kan bruges som begyndelsesbetingelse i en dynamisk model af HJM typen (40-41) for rentestrukturens fremtidige udvikling. Dette danner grundlag for prisfastsættelse og hedging af afledte aktiver. Et spørgsmål her er, om den antagne funktionelle form i tværsnitsanalysen, f.eks. NS, er konsistent med den dynamiske model, man derefter anvender. Spørgsmålet er vigtigt, fordi den dynamiske analyse altid kræver en initialrentekurve og dermed en forudgående tværsnitsanalyse. Björk, Christensen og Gombani (1998) udleder nødvendige og tilstrækkelige betingelser for en sådan konsistens. Resultaterne viser blandt andet, at de

populære NS og Ho-Lee modeller, for tværsnits- hhv. dynamisk analyse, er inkonsistente med hinanden.

Hvis man hver dag i stedet for at fitte en NS-kurve vælger at fitte de tre parametre i CIR modellen (43) ud fra det tilsvarende udtryk for nul kuponpriserne, fås varierende parametre fra dag til dag, og dette er naturligvis i klar modstrid med den antagne dynamiske, CIR, model. Metoden kan dog anvendes som en diagnostic på CIR modellen, og det blev først gjort af Brown og Dybvig (1986).

Alternativt kan man fokusere udelukkende på data for den korte rente, i princippet s_t , og udføre almindelig tidsrækkeanalyse, se afsnit 4 om tidsrækkeøkonometri. En populær model er

$$ds_t = \kappa(\theta - s_t)dt + \sigma s_t^\gamma dW_t, \quad (44)$$

hvor specialtilfældet $\gamma = 1/2$ er CIR-modellen. Den diskretiserede version eller såkaldte Euler-approksimation til denne model er

$$s_{t+1} - s_t = \kappa(\theta - s_t) + \varepsilon_{t+1} \quad (45)$$

hvor $E_t \varepsilon_{t+1}^2 = \sigma^2 s_t^{2\gamma}$. Chan, Karolyi, Longstaff og Sanders (1992) (CKLS) estimerer modellen v.h.a. GMM, idet de løser (45) med hensyn til ε_{t+1} og specificerer momentbetingelserne ud fra $g'_{t+1} = (\varepsilon_{t+1}, \varepsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 s_t^{2\gamma})$. Som i afsnit 2 ganges instrumenterne $z_t = (1, s_t)$ på hvert element i g_{t+1} . Herved fås en udvidet vektor h_t og dermed momentbetingelser $Eh_t = 0$ for de 4 parametre, dvs. modellen er eksakt identificeret, men der er ingen overidentificerende betingelser at teste. Konsistens kræver, at samplefrekvensen vokser ubegrænset, idet Euler-approksimationen ikke er eksakt. Man kan dog ikke bruge maximum likelihood, da likelihoodfunktionen for modellen i kontinuert tid er ukendt.

Når flere samtidige renter svarende til forskellige løbetider medtages, er der lagt op til en flerdimensional tidsrækkeanalyse. Det kan f.eks. undersøges, om korte og lange renter er kointegrerede, se afsnit 4 om tidsrækkeøkonometri.

5.3 Optioner

En option er tilknyttet et bestemt underliggende aktiv og giver en ret, men ikke en pligt, til at handle det underliggende aktiv til en pris og på et tidspunkt, der er forudbestemt i kontrakten. En call option er en ret til at købe,

og en put option en ret til at sælge det underliggende aktiv, som kan være en aktie, en obligation, eller lignende. Med en pris m_t som i (29) er prisen til tid t på en *call option* skrevet på en aktie, der har kurs S_T på udløbsdatoen $T > t$, altså givet ved $C = E_t \left(\frac{m_T}{m_t} \max \{S_T - K, 0\} \right)$.

Black og Scholes (1973) og Merton (1973b) antager, at aktiekursen følger en geometrisk Brownsk bevægelse (33), og bruger et arbitrageargument til at udlede et specialtilfælde af denne optionsprisformel, kendt som Black-Scholes formelen,

$$C(S, t, T, K, r_f, \sigma) = S\Phi(z) - e^{-(T-t)r_f} K\Phi(z - \sigma\sqrt{T-t}), \quad (46)$$

hvor Φ er standard normalfordelingen og $z = (\log(S_t/K) + (T-t)(r_f + \sigma^2/2))/\sigma\sqrt{T-t}$.

Med data S_1, \dots, S_T og C_1, \dots, C_T kan man prøve at bruge Black-Scholes formelen i hver periode. Den eneste ukendte parameter er aktieafkastsvolatiliteten, σ . Den implicitte volatilitet σ_t^i er defineret som den værdi, der sikrer, at ligningen $C_t = C(S_t, t, T, K, r_{ft}, \sigma_t^i)$ er opfyldt, dvs. at teorien stemmer overens med data. Hvis man har flere optioner $C_{t,1}, \dots, C_{t,n}$ til tid t , adskilt ved forskellige aftalekurser K_1, \dots, K_n , kan σ_t^i findes i den ikke-lineære regression

$$C_{t,j} = C(S_t, t, T, K_j, r_{ft}, \sigma_t^i) + \varepsilon_j, \quad (47)$$

der evt. kan vægtes med handelsvolumen, se Day og Lewis, 1988.

Hvis teorien holder, skulle σ_t^i være markedets bud til tid t på volatiliteten over optionens løbetid. Imidlertid har flere i litteraturen, specielt Canina og Figlewski (1993), fundet at den implicitte volatilitet ikke er noget godt forecast for den faktisk realiserede afkastsvolatilitet over den pågældende periode, målt ved sample standardafvigelsen σ_t^h . Analyserne er dog behæftet med forskellige økonomiske problemer, specielt overlappende data og korte tidsrækker. Christensen og Prabhala (1998) studerer regressionen

$$\sigma_t^h = a + b\sigma_t^i + c\sigma_{t-1}^h + \epsilon_t, \quad (48)$$

og ser på en lang tidsrække af ikke-overlappende data. Resultatet er i overensstemmelse med teorien, nemlig at $a = 0$, $b = 1$ og $c = 0$, idet dog $b < 1$ før oktoberkrakket i 1987. Rubinstein (1994) har også for perioden efter dette krak fundet de såkaldte Smil-effekter, hvor volatiliteten synes størst for de lave aftalekurser.

5.4 Volatilitet

Volatilitet er en central størrelse i mange finansielle sammenhænge. Således kan den systematiske risiko eller 'beta', som er så afgørende for prisfastsættelsen i CAPM og APT modellerne, forstås som enkeltaktivets bidrag til porteføljeafkastets volatilitet. I obligationstilfældet er volatiliteten af central betydning, og det er i denne dimension modellerne ofte søges udvidet. Dette er for eksempel tilfældet når man går fra CIR, se (43), til CKLS modellen, se (44). I HJM modellen (40-41) er volatiliteten altafgørende, idet driften i processen er en funktion af volatiliteten. Noget tilsvarende gør sig gældende i optionstilfældet, f.eks. indgår middelaflkastet slet ikke i Black-Scholes-formlen, (46) kun aflkastets volatilitet, og i den empiriske analyse sammenlignes implicit og realiseret volatilitet, se (47). Det er derfor værd at kigge en ekstra gang netop på volatiliteten.

Skønt afkaststraterne i sig selv ofte kun er svagt serielt korrelerede, udviser den tilsvarende tidsrække af kvadrerede afkaststrater stærk seriel korrelation. Ofte ses mange høje værdier af de kvadrerede afkaststrater i træk, efterfulgt af mange lave værdier, og så atter høje. Dette fænomen kan forklares ved hjælp af begrebet autoregressiv betinget heteroskedasticitet.

En autoregressiv betinget heteroskedasticitetsmodel af orden p , også kaldet en ARCH(p)-model, se Engle (1982), er givet ved

$$r_t = \mu + \sqrt{h_t}\epsilon_t . \quad (49)$$

Her er r_t afkaststrækken med middelaflkast μ , mens ϵ_t er en serielt ukorreleret støj, og h_t indikerer processen for de betingede varianser,

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p u_{t-p}^2 , \quad (50)$$

hvor $u_t = r_t - \mu$ er aflkastresidualen. I denne specifikation bestemmes niveauet for volatiliteten af de seneste p kvadrerede residualer.

Der gælder også, at hvis r_t følger en ARCH(p)-model, følger rækken af kvadrerede residualer en AR(p)-model. Bollerslev (1986) indfører udvidelsen hvor u_t^2 følger en ARMA-model. Dette resulterer i en generaliseret ARCH eller GARCH-model. Varianserne i GARCH(p, q)-modellen opfører sig som

$$h_t = \delta_0 + \delta_1 h_{t-1} + \dots + \delta_p h_{t-p} + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q u_{t-q}^2 . \quad (51)$$

Både ARCH- og GARCH-modeller er stationære, hvis parametrene er positive og summen af dem alle, undtagen den første, er mindre end een. Hvis

denne sum er een, fås den integrerede GARCH eller IGARCH-model, Engle og Bollerslev (1986).

Hvis man antager, at ϵ_t er standard normalfordelt, gennemføres maximum likelihood estimation ved for hvert afkast r_t at indsætte h_t for variansen i den sædvanlige Gaussiske likelihood funktion. Et test for, hvorvidt betinget heteroskedasticitet overhovedet er vigtigt i de givne data, kan baseres på signifikansen i en regression af de kvadrerede residualer på egne laggede værdier, inkl. et konstantled.

Udover GARCH er der mange andre variationer over ARCH-temaet. Engle, Lilien and Robins (1987) kæder den betingede heteroskedasticitet mere sammen med finansieringsteori ved at tillade at volatiliteten indgår i middelafkastet. Deres ARCH in Mean eller ARCH-M-model fremkommer ved at gange h_t på μ i ARCH(p)-modellen ovenfor. Nelson (1991) betragter en exponential GARCH-model (EGARCH), der tillader Blacks niveau-effekt, se (35), idet negative residualer, og dermed lavere kurser, leder til højere volatilitet end positive residualer.

En anden variation er at tillade uendelig mange lags i GARCH-ligningen, så man får "long memory" i volatiliteterne. Dette er empirisk relevant, f.eks. summerer estimerede GARCH-parametre ofte til næsten en. På den anden side tyder data på, at stød i volatiliteten dør ud på meget langt sigt. Derfor indfører Baillie, Bollerslev og Mikkelsen (1996) en Fraktionel IGARCH eller FIGARCH model som alternativ til IGARCH. Modellens simpleste form er

$$h_t = \delta_0 + \delta_d(L) u_t^2,$$

hvor δ_d netop er et uendeligt polynomium i lag-operatoren L , parametriseret ved $d \in [0, 1]$ som

$$\delta_d(L) = d \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(1-d)\Gamma(k-1)} L^k \quad (52)$$

hvor Γ er gamma-funktionen. For $d = 1$ fås atter IGARCH, mens $d \in (0, 1)$ tillader long memory og dog mean-reversion.

Hvis ligningen for h_t i (51) udvides med et støjled der er uafhængigt af alt andet på højresiden, fremkommer en stokastisk volatilitetsmodel.

Det er langt vanskeligere at udføre maximum likelihood eller anden estimation for stokastiske volatilitetsmodeller end for GARCH-modeller. Normalt vil man skulle integrere samtlige uobserverede volatiliteter ud i likelihood funktionen, og dette resulterer i et T -dobbelt integral, hvor T er længden af dataserien. Dette er umuligt i praksis. Nelson (1990) viser dog at

GARCH-modeller er gode approksimationer til stokastiske volatilitetsmodeller. Der gælder specielt, at GARCH-modeller under visse betingelser konvergerer til stokastiske volatilitetsmodeller når intervallet mellem observationerne bliver mindre. Derfor kan man i en vis udstrækning simpelthen basere analysen på GARCH-modeller, specielt for højfrekvente data.

5.5 Fremtidig udvikling i finansiel økonometri

Vi har kun diskuteret en brøkdel af området finansiel økonometri. Visse felter, vi ikke har berørt, kan meget vel blive vigtige i fremtiden. Det kan dog forudses, at megen nyudvikling vil være data-drevet. For eksempel er opblomstringen af mikrostruktur-analysen, hvor man betragter betydningen af forhold som asymmetrisk information, likviditet og institutionelle forhold for enkelt-handler, en konsekvens af den forbedrede adgang til højfrekvente data, og der er ingen tvivl om, at dette er en udvikling, der vil fortsætte. Man har tidligere set, hvordan fremkomsten af CRSP data med daglig og lavere frekvens ledte til den analyse af aktier og obligationer, der er diskuteret ovenfor. For disse instrumenters vedkommende kan der forudses en stadig nærmere sammenknytning af teori og empirisk metode. Det samme vil ske for optionernes vedkommende, og her bliver det specielt vigtigt at udvikle tilfredsstillende metoder for inkomplette markeder, f.eks. i situationer med stokastisk volatilitet. Empirisk analyse af amerikanske optioner, hvor der kan handles til aftalekursen også før optionens udløb, og optioner på rentestrukturen er andre vigtige forskningsretninger. Endelig må man indenfor virksomhedernes finansiering og investeringsplanlægning forudse en stadig øget anvendelse af spilteori, og specielt en udvidelse af det eksisterende modelapparat til at håndtere dynamiske problemer, for eksempel virksomhedernes udjævning af udbyttebetalinger over tid.

6 Latente strukturmodeller

I dette afsnit behandles modeller til analyse af sammenhænge mellem latente variable. Specielt vil de såkaldte Linear Structural Relationship eller LISREL-modeller blive diskuteret.

LISREL-modellernes fordel er deres store generalitet og fleksibilitet. Ligesom de almindelige økonometriske metoder åbner de mulighed for at betragte

simultane ligninger med mange endogene variable, men derudover tillader de også målefejl i såvel exogene som endogene variable. Som i faktoranalysen, der er udviklet inden for psykometrien og sociometrien, tillader LISREL-modellerne multiple indikatorer for latente variable, samt tillige estimation af reliabilitet og validitet. Dertil kommer, at LISREL tillader mere generelle målemodeller end traditionel faktoranalyse, og analytikerne har mulighed for at modellere strukturelle sammenhænge mellem de latente variable. LISREL-modellerne er således en syntese af procedurer, der er udviklet inden for såvel økonometrien som psykometrien og sociometrien. LISREL-modellerne bygger på en analyse af datasættets kovariansstruktur. Områdets oprindelige pionerer, der startede deres arbejde i 60'erne, er svenskerne Karl G. Jöreskog og Dag Sörbom se Jöreskog og Sörbom (1988, 1989, 1993a, b, c), samt Bollen(1989) og Bollen og Long(1993).

6.1 Den generelle LISREL-model

LISREL-modellen, med variable målt i afvigelser fra gennemsnittet, er defineret ved følgende tre ligninger:

Den strukturelle ligningsmodel:

$$\eta = B\eta + \Gamma\xi + \zeta \quad (53)$$

Målemodellen for y :

$$y = \Lambda_y\eta + \epsilon \quad (54)$$

Målemodellen for x :

$$x = \Lambda_x\xi + \delta \quad (55)$$

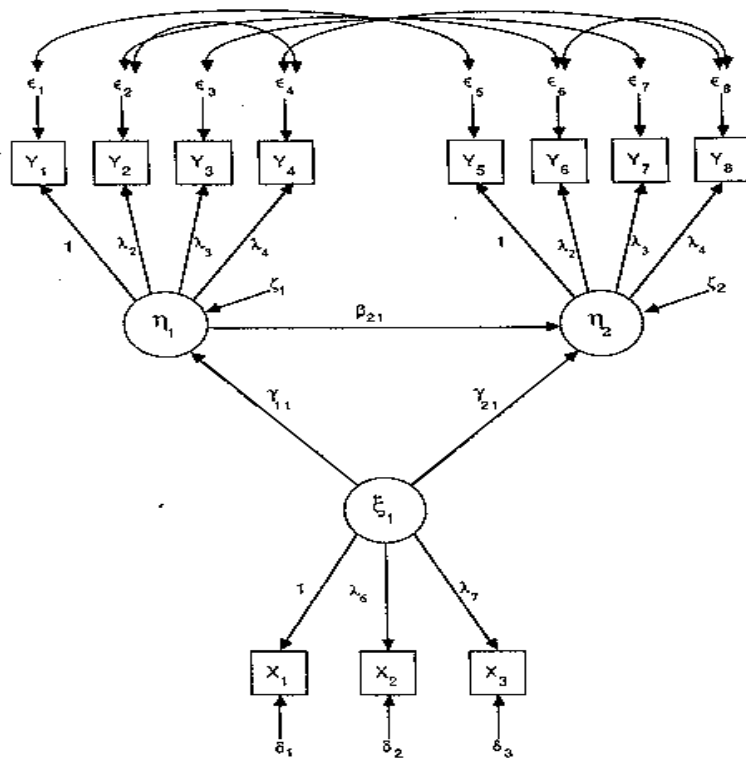
η er en m vektor af latente endogene variable, ξ en n vektor af latente eksogene variable, ζ en m vektor af fejlede i de strukturelle relationer, mens y og x er p og q vektorer af indikatorer for η og ξ . ϵ og δ er p og q vektorer af målefejl, mens B , Γ , Λ_y og Λ_x er koefficientmatricer

Det forudsættes, at den forventede værdi af alle fejlede og latente variable er lig med nul, ϵ er ukorreleret med η , δ er ukorreleret med ξ , ζ er ukorreleret med ξ , og ζ , ϵ og δ er indbyrdes ukorrelerede. Koefficientmatricen B har nuller på diagonalen af selvindlysende grunde og $I - B$ skal være ikke singulær. Modellens kovariansmatricer er : $Cov(\xi) = \Phi$, $Cov(\zeta) = \Psi$, $Cov(\epsilon) = \Theta_\epsilon$ og $Cov(\delta) = \Theta_\delta$.

Et specielt tilfælde af modellen er en simultan ligningsmodel i de observerede variable. Denne model fremkommer ved at sætte $\Lambda_y = I_m$, $\Lambda_x = I_n$, $\Theta_\delta = 0$ og $\Theta_\epsilon = 0$. Derved ændres (53) til

$$y = By + \Gamma x + \zeta \quad (56)$$

LISREL-modellen kan også illustreres i et stidiagram, jf. figur 1, der viser en model for sammenhængen mellem graden af industrialisering og politisk demokrati i 75 udviklingslande. Det er en panelmodel med to latente endogene variable, politisk demokrati i 1960 (η_1) og 1965 (η_2) og en latent exogen variabel, industrialiseringen i 1960 (ξ_1). Industrialiseringen er målt med tre indikatorer, medens politisk demokrati for 1960 og 1965 hver er målt med de samme fire indikatorer. Den strukturelle ligningsmodel ses at være rekursiv.



Figur 1:

Figur 1. Panelmodel for politisk demokrati og industrialisering for udviklingslande, 1960 til 1965.

ξ_1 : industrialiseringen i 1960, x_1 : BNP per capita 1960, x_2 : energiforbrug per capita 1960, x_3 : andelen af arbejdsstyrken i industrien 1960, η_1, η_2 : politisk demokrati 1960, 1965, y_1, y_5 : pressefrihed 1960, 1965, y_2, y_6 : oppositionsfrihed 1960, 1965, y_3, y_7 : valgs ærlighed 1960, 1965, y_4, y_8 : valglovens effektivitet 1960, 1965. Bemærk at $y_1 - y_8$: er baseret på ekspertvurderinger.

Målefejlene for den samme indikator i 1960 og 1965 tillades at være korrelerede. Det samme gælder målefejlene for indikatorer, der bygger på vurderinger fra den samme dommer: (y_2, y_4) og (y_6, y_8) .

I denne LISREL-model ses det, at hver latent variabel har en λ -værdi, der er fastsat til 1. Det betyder, at den latente variabel og den tilhørende observerede variabel har samme skalering.

Vi vil nu se på LISREL-modellens kovariansstruktur.

Betragt $(p + q) \times 1$ vektoren $\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ af observerede variable. Dens kovariansmatrix Σ af orden $(p + q) \times (p + q)$ kan skrives

$$\Sigma = \Sigma(\theta) \quad (57)$$

hvor Σ er en funktion af alle modellens parametre, sammenfattet i vektoren θ . $\Sigma(\theta)$ kaldes den implicerede kovariansmatrix.

Identifikationsproblemet relaterer sig til, hvorvidt det er muligt at finde løsninger for θ som funktion af elementerne $\{\sigma_{ij}\}$ i Σ . Der findes en lang række regler for kontrol af modellens identifikation, regler, som er delvis kendte fra simultane ligningsmodeller. Undersøgelse af den generelle models identifikation foregår i to trin. Først kontrolleres alle målemodeller under ét. Er de identificeret, kan den strukturelle model kontrolleres med reglerne for identifikation af simultane ligningsmodeller. Den mest simple regel lyder som følger: Lad antallet af ukendte parametre i θ være h . En nødvendig betingelse for identifikation er således

$$h \leq (p + q + 1)(p + q)/2 \quad (58)$$

6.2 Estimation

Da populationskovariansmatricen Σ normalt er ukendt, benyttes i stedet den tilsvarende stikprøvekovariansmatrix S , der er beregnet ud fra en tilfældig stikprøve på N observationer.

Estimationen foregår i princippet på den måde, at estimatet $\hat{\theta}$ bestemmes således, at en kriterie- eller fit-funktion, F , som måler afvigelsen mellem S og $\Sigma(\theta)$ minimeres. Den fittede kovariansmatrix betegnes $\widehat{\Sigma} = \Sigma(\hat{\theta})$. Normalt defineres F således, at $F(\theta)$ er en skalar, at $F(\theta) \geq 0$, $F(\theta) = 0 \Leftrightarrow S = \Sigma(\theta)$ og at $F(\theta)$ er kontinuert.

Minimering af fitfunktioner med disse egenskaber fører til konsistente estimater for θ . F 's udseende afhænger naturligvis af estimationsmetoden.

I praksis benyttes Uvejte Mindste Kvadraters Metode, ULS, Generaliseret Mindste Kvadraters metode, GLS, eller Maximum likelihood metoden, ML, der alle er specialtilfælde af den Generaliserede Vejede Mindste Kvadraters Metode, WLS.

WLS metodens fit-funktion er defineret ved

$$F_{WLS} = (s - \sigma(\theta))'W^{-1}(s - \sigma(\theta)) \quad (59)$$

hvor s er en vektor af de $k = (p + q + 1)(p + q)/2$ ikke redundante elementer i S og $\sigma(\theta)$ den tilsvarende vektor fra $\Sigma(\theta)$, også af orden k . W^{-1} er en positiv definit vægtmatrix. For at opnå asymptotisk efficiens vælges elementerne i W som konsistente estimater af de tilsvarende kovarianser mellem kovarianserne i S . W kan ofte med fordel estimeres ved hjælp af bootstrapmetoden.

I mange samfundsvidenskabelige undersøgelser indgår der ordinale skalerede variable. I den slags tilfælde estimeres der en såkaldt polykorisk korrelationsmatrix, som så er input til LISREL-modellen. Det antages, at der bag hvert par af ordinale skalerede variable ligger et par af latente kontinuerte variable, der er todimensionalt normalfordelt. På basis af de to ordinale variables todimensionale antalstabel estimeres korrelationen mellem de to latente variable ved Maximum Likelihood. Denne korrelation kaldes den polykoriske korrelation. Mellem to kontinuerte variable estimeres en sædvanlig Pearson korrelationskoefficient og for par af variable, hvor den ene er ordinal og den anden kontinuert, estimeres en såkaldt polyserial korrelation. Da det også er muligt at udregne den asymptotiske kovariansmatrix for den således frembragte korrelationsmatrix, er en asymptotisk fordelingsfri bedste WLS estimator mulig selv i modeller med ordinale skalerede variable.

6.3 Test og goodness of fit

Den grundlæggende hypotese

$$H_0 : \Sigma = \Sigma(\theta)$$

kan testes ved et likelihood ratio test. Her benyttes, at $(N - 1) F [S, \Sigma(\hat{\theta})]$ under H_0 er χ^2 -fordelt med $(p + q + 1)(p + q)/2 - h$ frihedsgrader.

Til vurdering af den estimerede model benyttes en lang række goodness of fit mål, som bygger på denne χ^2 -størrelse og antallet af frihedsgrader. Nogle mål er af den relative type, idet de foruden den estimerede models egen χ^2 -værdi og frihedsgradsantal også benytter de tilsvarende størrelser

for en baselinemodel, f.eks. en uafhængighedsmodel, dvs. en model, hvor $\Sigma = \Sigma(\theta)$ er diagonal. Residualerne, som er elementer i $S - \Sigma(\hat{\theta})$, bruges også til vurdering af den estimerede model.

Der kan opstilles diverse LR, Wald og LM tests for nastede modeller. I denne forbindelse er det værd at nævne det såkaldte modifikationsindex, som er et LM test med én frihedsgrad. Det angiver, hvor meget χ^2 for en model reduceres, hvis en fixed parameter sættes fri til estimation, og kan derfor være et redskab ved modifikation af modellen. Alle tests angående koefficienter, som kendes fra regressionsanalyse, kan bruges i LISREL-modellen. Dog er der her tale om asymptotiske tests, dvs. χ^2 og normalfordelingstest, se afsnit 2.

Ved sammenligning af forskellige modeller, herunder modeller der ikke er nastede, er det særdeles hensigtsmæssigt at benytte krydsvalideringsteknikken. Den kræver, at stikprøven er så stor, at man tilfældigt kan splitte den i to halvdele og så estimere modellerne på basis af den ene halvdel, estimationsstikprøven. Ved at sammenligne de implicerede kovariansmatricer for de forskellige estimerede modeller med kovariansmatricen i valideringsstikprøven kan man finde frem til den model, der bedst kan reproducere kovariansmatricen i en ny tilfældig stikprøve, Browne & Cudeck (1989), uden at man kommer til at vælge en model, der overfitter data.

6.4 Diskussion

Af den foranstående gennemgang skulle det gerne fremgå, at LISREL-modellerne er generelle og således velegnede til beskrivelse af data i mange forskellige situationer. Det er imidlertid meget vigtigt, at der inden for det pågældende fagområde på forhånd er opstillet en velunderbygget teori, inden man forsøger at estimere en LISREL-model. Et excellent statistisk fit for en svagt teoretisk funderet model er naturligvis ikke meget værd.

Hvad er så ulemperne ved disse metoder? Her må man først og fremmest anføre kravet til stikprøvestørrelsen. I små simple modeller skal man normalt op på ca.100 observationer, og kravet vokser let til flere hundrede, når antallet af variable vokser. Specielt kræver WLS-metoden meget store stikprøver, for at fjerde ordens-momenterne, der er nødvendige for bestemmelsen af elementerne i W kan beregnes med tilstrækkelig nøjagtighed. Her kan dog bootstrapmetoden være en hjælp, se afsnit 2. En anden ulempe, som imidlertid er en følge af selve ideen om en strukturel ligningsmodel indeholdende latente variable, er, at man jo ikke kan beregne fittede værdier og

residualer for enkeltobservationer, som det er normalt i regressionsanalysen. Det statistiske goodness of fit bygger derfor alene på residualerne defineret som forskellen mellem elementerne i kovariansmatricen S og den implicerede kovariansmatrix $\Sigma(\hat{\theta})$. Det er en stor fordel, at WLS metoden nu er til rådighed, men kravet til computerkapacitet vokser i denne forbindelse kraftigt. Antag f.eks. at man i et datasæt har 20 observerede variable. Så har den asymptotiske kovariansmatrix W , 21 gange 20 rækker og søjler eller ialt 22155 forskellige elementer, som kræver beregning, inden den egentlige LISREL-estimation kan begynde.

6.5 Fremtidig udvikling i latente struktur modeller

LISREL-modellerne har efterhånden stor succes i flere driftsøkonomiske anvendelser. F.eks. er en LISREL-model til forklaring af servicekvalitet i banker og på kommunalkontorer med variablene delegation, uafhængighed, IT-support, uddannelse og motivation anvendt af Nielsen og Høst (1997). Det forventes at denne udvikling fortsætter og at anvendeslesområdet udvides til andre områder af økonomien, som f.eks. public choice.

7 Litteraturhenvisninger

T. Amemiya, 1985. *Advanced Econometrics*, Harvard University Press, Boston.

Anderson, H.M. og F. Vahid, 1998. "Testing Multiple Equation Systems for Common Nonlinear Components". *Journal of Econometrics*, 84, 1-36.

Baillie, R.T., T. Bollerslev og H.O.Mikkelsen, 1996." Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity". *Journal of Econometrics*, 74, 3-31.

Baltagi, B. H., 1995. *Econometric Analysis of Panel Data*. John Wiley & Sons. New York

Banerjee, A., J. Dolado, J. W. Galbraith, og D. Hendry, 1993. *Co-integration, Error-correction, and the Econometric Analysis of Non-stationary Data*. Oxford University Press, Oxford.

Barndorff-Nielsen, O.E. and D.R. Cox, 1989. *Asymptotic Techniques for Use in Statistics*. Chapman and Hall, London.

Björk, T., B.J. Christensen, og A. Gombani, 1998. "Some Control Theoretic Aspects of Interest Rate Theory". *Insurance, Mathematics, and Eco-*

nomics, forthcoming.

Black, F., 1976. "Studies of Stock Price Volatility Changes". *Proceedings of the 1976 Meetings of the Business and Economic Statistics Section, American Statistical Association*, 177-181.

Black, F., og M. Scholes, 1973. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy*, 81, 637-654.

Bollen, K.A., 1989. *Structural Equations with Latent Variables*. John Wiley and Sons, New York.

Bollen, K.A. og Long, J.S. (eds.), 1993. *Testing Structural Equation Models*. Sage Publications, New York

Bollerslev, T., 1986. "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity". *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.

Box, G.E.P. og G.M. Jenkins, 1970. *Time Series Analysis, Forecasting og Control*. Holden-day, San Francisco.

Brock, W.A., W.D Dechert, og J.-A. Scheinkman, 1989. A Test for Independence Based on the Correlation Dimension. *SSRI Working Paper No. 8702*, Dept. of Economics, University of Wisconsin.

Brown, S., og P. Dybvig, 1986. "The Empirical Implications of the Cox, Ingersoll, and Ross Theory of the Term Structure of Interest Rates". *Journal of Finance*, 41, 617-632.

Browne, M.W. & Cudeck, R., 1989. "Single Sample Cross-Validation Indices for Covariance Structures". *Multivariate Behavioural Research*, 24, 445-455.

Campbell, J., og R. Shiller, 1987. "Cointegration and Tests of Present Value Models". *Journal of Political Economy*, 95, 1062-1087.

Canina, L., og S. Figlewski, 1993. "The Informational Content of Implied Volatility". *Review of Financial Studies*, 6, 659-681.

Chan, L., G. Karolyi, F. Longstaff og A. Sanders, 1992. "An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate". *Journal of Finance*, 47, 1209-1227.

Chen, N.R., R. Roll og S. Ross, 1986. "Economic Forces and the Stock Market". *Journal of Business*, 59, 383-403.

Christensen, B.J., 1994. "Efficiency Gains in Beta-Pricing Models". *Mathematical Finance*, 4, 143-154.

Christensen, B.J., og N.R. Prabhala. 1998. "The Relation Between Implied and Realized Volatility". *Journal of Financial Economics*, forthcoming.

Cox, J., J. Ingersoll, og S. Ross, 1985. "A Theory of the Term Structure of Interest Rates". *Econometrica*, 53, 385-408.

Davidson, R. og J. MacKinnon, 1984. "Convenient Tests for Probit and Logit Models". *Journal of Econometrics*, 25, 241-262.

Davidson, R. og J.G McKinnon, 1993. *Estimation and Inference in Econometrics*. Oxford University Press, Oxford.

Day, T. og C. Lewis, 1988. "The Behavior of the Volatility Implicit in Option Prices". *Journal of Financial Economics*, 33, 103-122.

Devine, Theresa J. og Nicholas M. Kiefer, 1991. *Empirical Labor Economics: the Search Approach*. Oxford University Press, Oxford.

Dickey, D. A., og W. A. Fuller, 1979. "Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root". *Journal of American Statistical Association*, 74, 427-431.

Dickey, D.A., D.P. Hasza, og W.A. Fuller, 1984. "Testing for Unit Roots in Seasonal Time Series". *Journal of the American Statistical Association*, 76, 355-67.

Elliott, G., T.J. Rothenberg, og J.H. Stock, 1996. "Efficient Tests for an Autoregressive Unit Root". *Econometrica*, 64, 813-36

Engle, R., 1982. "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation". *Econometrica*, 50, 987-1008.

Engle, R.F. og T. Bollerslev, 1986. "Modeling the Persistence of Conditional Variances". *Econometric Reviews*, 5, 1-50.

Engle, R., D. Lilien, og R. Robins, 1987. "Estimating Time-Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model". *Econometrica*, 55, 391-407.

Engle, R. F., og C.W.J. Granger, 1987."Co-integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing". *Econometrica*, 55, 2, 251-276.

Engle, R. F., D.F. Hendry, og J.F. Richard, 1983. "Exogeneity". *Econometrica*, 51, 277-304.

Engle, R.F, og S. Hylleberg, 1996. "Common Seasonal Features: Global Unemployment". *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 58, 615-630.

Engle, R.F. og S. Kozicki, 1993. "Testing for Common Features". *Journal of Business and Economics Statistics*, 11, 369-380.

Epstein, L. og S. Zin, 1989. "Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework". *Econometrica*, 57, 937-968.

Ericsson, N.R., D.F. Hendry, og K.M. Prestwich, 1997." The UK Demand for Broad Money over the Long Run". Forthcoming *Scandinavian Journal of Economics*.

- Fuller, W. A., 1976. *Introduction to Statistical Time Series*. John Wiley and Sons, New York,.
- Gibbons, M., S. Ross, og J. Shanken, 1989. "A Test of the Efficiency of a Given Portfolio". *Econometrica*, 57, 1121-1152.
- Gonzalo, J. og C.W.J. Granger, 1995. "Estimation of Common Long-Memory Components in Cointegrated Systems". *Journal of Business and Economic Statistics*, 13,1. 27-35.
- Gourieroux, C. og A.Monfort, 1995. *Statistics and Econometric Models*, Volume II. Cambridge University Press, Cambridge.
- Granger, C.W.J., 1983. "Cointegrated Variables and Error Correction Models". *Discussion paper*, UCSD.
- Granger, C.W.J. og P. Newbold, 1986. *Forecasting Economic Time Series*, 2nd ed., Academic Press, Orlando.
- Granger, C.W.J., og N. Haldrup, 1997. "Separation in Cointegrated Systems and Persistent-temporary Decompositions". *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 59, 449-464.
- Granger, C. W. J., og T. Lee, 1989. "Investigation of Production, Sales and Inventory Relations Using Multicointegration and Non-symmetric Error Correction Models". *Journal of Applied Econometrics*, 4 (supplement), 145-159.
- Granger, C. W. J., og P. Newbold, 1974. "Spurious Regressions in Econometrics". *Journal of Econometrics* , 26 1045-1066.
- Granger, C. W. J., og T. Teräsvirta, 1993. *Modelling Nonlinear Economic Relationships*. Oxford University Press, Oxford.
- Haldrup, N., 1994. "Semi-parametric Tests for Double Unit Roots". *Journal of Business and Economic Statistics* 12, 109-122.
- Haldrup, N., 1996. "Mirror Image Distributions and the Dickey Fuller Regression with a Maintained Trend". *Journal of Econometrics*, 72, 301-313.
- Haldrup, N., 1998. "A Review of the Econometric Analysis of I(2) Variables". Forthcoming in the *Journal of Economic Surveys*.
- Haldrup, N. og S. Hylleberg, 1995. "A Note on the Distribution of the Least Squares Estimator of a Random Walk with Drift: Some Analytical Evidence". *Economics Letters*, 48, 221-228.
- Haldrup, N. og S. Hylleberg, 1997. "Near-integration and Deterministic Trends". *Statistical Papers*, 38, 77-101.
- Hall, P., 1992. *The Bootstrap and Edgeworth Expansion*. Springer-Verlag, Berlin

Hall, P., 1994. "Methodology and Theory for Bootstrap". Chapter 39 in: *Handbook of Econometrics*, Vol. IV edited by R. F. Engle og D. L. McFadden. Elsevier Science B.V., Amsterdam

Hall, R.E., 1978. "Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence". *Journal of Political Economy*, 86, 971-988.

Ham, J. og R. J. Lalonde, 1996. "The Effect of Sample Selection and Initial Conditions in Duration Models: Evidence from Experimental Data on Training". *Econometrica*, 64, 175-205.

Hamilton, J.D., 1989. "A New Approach to the Econometric Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle". *Econometrica*, 57, 357-384.

Hamilton, J.D., 1994. *Time Series Analysis*. Princeton University Press, Princeton.

Hansen, H. og K. Juselius, 1994. *Cats in Rats, Manual to Cointegration Analysis of Times Series*. Estima, Evanston.

Hansen, L.P., 1982. "Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators". *Econometrica*, 50, 1029-1054.

Hansen, L.P., og K. Singleton, 1982. "Generalized Instrumental Variables Estimation of Nonlinear Rational Expectations Models". *Econometrica*, 50, 1269-1288.

Hasza, D.,P. and W.A. Fuller, 1979. "Estimation of Autoregressive Processes with Unit Roots". *The Annals of Statistics*, 7, 1106-1120.

Heath, D., R. Jarrow, og A. Morton, 1992. "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation". *Econometrica*, 60, 77-105.

Heckman, J., 1979. "Sample Selection Bias as a Specification Error". *Econometrica*, 47, 153-161.

Heckman, J. og B. Singer, 1984. "Method for Minimizing the Impact of Distributional Assumptions in Econometric Models for Duration Data". *Econometrica*, 52, 271-320.

Hendry, D. F. og J. A. Doornik, 1996. *Empirical Econometric Modelling: Using PcGive 9.0 for Windows*. International Thomson Business Press, London

Hendry, D.F., 1995. *Dynamic Econometrics. Advanced Texts in Econometrics*. Oxford University Press, Oxford.

Ho, T., og S. Lee, 1986. "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims". *Journal of Finance*, 41, 1011-1029.

Honoré, Bo., 1992. "Trimmed LAD and Least Squares Estimation of Truncated and Censored Regression Models with Fixed Effects". *Econometrica*, 60, 533-565.

Honoré, Bo og Ekaterini Kyriazidou, 1997. "Panel Data Discrete Choice Models with Lagged Dependent Variables". *Unpublished Working Paper*, Princeton University.

Hylleberg, S., R.F. Engle, C.W.J. Granger, og B.S. Yoo, 1990. "Seasonal Integration and Cointegration". *Journal of Econometrics*, 44, 215-38.

Hylleberg, S. og G.E. Mizon, 1989. "A Note on the Distribution of the Least Squares Estimator of a Random Walk with Drift". *Economics Letters*, 29, 225-230.

Härdle, W., 1990. *Applied Nonparametric Regression*, Cambridge University Press, Cambridge.

Johansen, S., 1988. "Statistical Analysis of Cointegration Vectors". *Journal of Economic Dynamics and Control*, 8, 231-254.

Johansen, S., 1991. "Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models". *Econometrica*, 59, 1551-1580.

Johansen, S., 1994. "The Role of the Constant and Linear Terms in Cointegration Analysis of Non-stationary Variables". *Econometric Reviews*, 13, 205-229.

Johansen, S., 1995a. *Likelihood-based inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*. Oxford University Press, Oxford.

Johansen, S., 1995b. "A Statistical Analysis of Cointegration for I(2) Variables". *Econometric Theory*, 11, 25-59.

Johansen, S., 1997. "Common Stochastic Trends in the I(1) Model". *Mimeo*, European University Institute, Firenze.

Johansen, S. og K. Juselius, 1994. "Identification of the Long-run and the Short-run Structure, An Application to the ISLM Model". *Journal of Econometrics*, 63, 7-36.

Johansen, S. og E. Schaumburg, 1997. "Likelihood Analysis of Seasonal Cointegration". *Mimeo*, European University Institute, Firenze.

Juselius, K., 1994. "On the Duality between Long-run Relations and Common Trends in the I(1) and I(2) case. An Application to Aggregate Money Holdings". *Econometric Reviews*, 13, 151-178.

Juselius, K., 1996. "An Empirical Analysis of the Changing Role of the German Bundesbank after 1983". *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 58, 791-819.

- Jöreskog, K.G. & Sörbom, D., 1988. *PRELIS - A Program for Multivariate Data Screening and Data Summarization. A preprocessor for LISREL*. Second Edition. Scientific Software, Inc, Chicago.
- Jöreskog, K.G. og Sörbom, D., 1989b. *LISREL 7 User's Reference Guide*. Scientific Software International, Chicago.
- Jöreskog, K.G. og Sörbom, D. 1993a. *New Features in PRELIS2*. Scientific Software International, Chicago
- Jöreskog, K.G. og Sörbom, D., 1993b. *New Features in LISREL8*. Scientific Software International, Chicago.
- Jöreskog, K.G. og Sörbom, D., 1993c. *LISREL8: Structural Equation Modeling with the SIMPLIS Commog Language*. Scientific Software International, Chicago
- Kiefer, N. M., 1988. "Economic Duration Data and Hazard Functions". *Journal of Economic Literature*, 26, 646-679.
- King, R. G., C. I. Plosser, J. H. Stock, og M. W. Watson, 1991. "Stochastic Trends and Economic Fluctuations". *American Economic Review*, 81, 819-840.
- Kyriazidou, E., 1997. "Estimation of a Panel Data Sample Selection Model". *Econometrica* 65, 1335-1364.
- Lancaster, Tony, 1990. *The Econometric Analysis of Transition Data*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Lo, A. og A.C.MacKinlay, 1988. "Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks: Evidence from a Simple Specification Test", *Review of Financial Studies*, 1, 41-66.
- Lucas, R., Jr., 1978, "Asset Prices in an Exchange Economy". *Econometrica*, 46, 1429-1446.
- Markowitz, H., 1959. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. John Wiley and Sons, New York.
- Mátyás, L. og P. Sevestre (eds.), 1996. *The Econometrics of Panel Data: A Handbook of the Theory with Applications*, second revised edition. Kluwer, Amsterdam.
- McCabe, B. og A. Tremayne, 1992. *Elements of Modern Asymptotic Theory with Statistical Applications*. Manchester University Press, Manchester.
- Mehra, R. og E. Prescott, 1985. "The Equity Premium: A Puzzle". *Journal of Monetary Economics*, 15, 145-161.
- Merton, R., 1973a. "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model". *Econometrica*, 41, 867-887.

- Merton, R., 1973b. "Rational Theory of Option Pricing". *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141-183.
- Modigliani, F., og M.H. Miller, 1958. "The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment". *American Economic Review*, 48, 267-297.
- Mullahy, J., 1986. "Specification and Testing of Some Modified Count Data Models". *Journal of Econometrics* 33, 341-365.
- Nelson, D., 1990. "ARCH Models as Diffusion Approximations". *Journal of Econometrics*, 45, 7-39.
- Nelson, D., 1991. "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach". *Econometrica*, 59, 347-370.
- Nelson, C., og A. Siegel, 1987. "Parsimonious Modelling of Yield Curves". *Journal of Business*, 60, 473-489.
- Newey, W., K. og K. West, 1987. "A Simple Positive Semi-Definite, Heteroscedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix". *Econometrica*, 55, 703-708.
- Newey, W., K. og D. McFadden, 1994. "Large Sample Estimation and Hypothesis Testing" Chapter 36 in: *Handbook of Econometrics*, Vol. IV, eds. R.F. Engle og D. L. McFadden. Elsevier Science B.V. Amsterdam.
- Nielsen, J.,F. og V. Høst, 1997. "The Path to Service Quality at 'Bureaucratic' Encounters: The Impact of Private and Public Initiatives". *AFV-Skrifter 1997-16*, Institut for Økonomi, Aarhus Universitet.
- Phillips, P. C. B., 1986. "Understanding Spurious Regressions in Econometrics". *Journal of Econometrics*, 33, 311-340.
- Phillips, P. C. B., 1987a. "Time Series Regression with a Unit Root". *Econometrica*, 55, 277-302.
- Phillips, P. C. B., 1987b. "Towards a Unified Theory for Autoregression". *Biometrika*, 74, 535-47.
- Phillips, P. C. B. og P. Perron, 1988. "Testing for a Unit Root in Time Series Regression". *Biometrika*, 75, 35-46.
- Powell, J., 1994. "Estimation of Semiparametric Models", chapter 41 in: *Handbook of Econometrics*, Vol. IV, edited by R. F. Engle og D. L. McFadden. Elsevier Science B.V, Amsterdam..
- Pudney, S, 1989. *Modelling Individual Choice: The Econometrics of Corners, Kinks, and Holes*. Blackwell., Oxford
- Roll, R., 1977. "A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests: Part I". *Journal of Financial Economics*, 4, 129-176.

- Rosholm, M., 1997. "Transitions in the Labour Market". Unpublished *Ph.D. thesis*, University of Aarhus.
- Ross, S., 1976. "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing". *Journal of Economic Theory*, 13, 341-360.
- Rubinstein, M., 1994. "Implied Binomial Trees", *Journal of Finance*, 69, 771-818.
- Shanken, J., 1992. "On the Estimation of Beta-Pricing Models". *Review of Financial Studies*, 5, 1-34.
- Sharpe, W., 1964. "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk". *Journal of Finance*, 19, 425-442.
- Shiller, R., 1981. "Do Stock Prices Move Too Much to Be Justified by Subsequent Changes in Dividends?". *American Economic Review*, 71, 421-436.
- Sims, C.A., J.H. Stock, og M.W. Watson, 1990. "Inference in Linear Time Series Models with Some Unit Roots". *Econometrica*, 58, 113-144.
- Tiao, G.C., og R.S. Tsay, 1989. "Model Specification in Multivariate Time Series". *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 51, 157-213.
- Tong, H., 1990. *Non-linear Time Series - A Dynamical System Approach*. Oxford University Press, Oxford.
- Vahid, F. og R.F. Engle, 1993. "Common Trends and Common Cycles". *Journal of Applied Econometrics*, 8, 341-60.
- West, K.D., 1988. "Asymptotic Normality, when Regressors Have a Unit Root". *Econometrica*, 56, 1397-1417.
- Winkelmann, R., 1997. *Count Data Models: Econometric Theory and an Application to Labor Mobility*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin
- Wooldridge, J. M., 1994. "Estimation and Inference for Dependent Processes", ch.. 45 in: *Handbook of Econometrics*, Vol. IV, edited by R. F. Engle og D. L. McFadden. Elsevier Science B.V., Amsterdam.

Working Paper

- 1998-2 Philipp J.H. Schröder: The Fiscal Constraint to Restructuring of Firms in Transition Economies.
- 1998-3 Henrik Christoffersen and Martin Paldam: Markets and Municipalities. A Study of the Behaviour of the Danish Municipalities.
- 1998-4 Martin Paldam: Soft Criteria in Danish Development Aid. An Essay on Post-Materialist Values in Practice.
- 1998-5 Torben M. Andersen and Steinar Holden: Business Cycles and Fiscal Policy in an Open Economy.
- 1998-6 Svend Hylleberg and Rikke Willemoes Jørgensen: A Note on the Estimation of Markup Pricing in Manufacturing.
- 1998-7 Martin Paldam: A Small Country in Europe's Integration. Generalizing the Political Economy of the Danish Case.
- 1998-8 Martin Paldam and Gert Tinggaard Svendsen: An Essay on Social Capital. Reflections on a Concept Linking Social Sciences.
- 1998-9 Torben M. Andersen and Robert R. Dogonowski: Social Insurance and the Public Budget.
- 1998-10 Robert R. Dogonowski: Fiscal Policy Design, Imperfect Competition and Productivity Shocks.
- 1998-11 Robert R. Dogonowski: Should Federal or Regional Insurance Protect the EMU?
- 1998-12 Robert R. Dogonowski: Income Taxation, Imperfect Competition and the Balanced Budget Multiplier.
- 1998-13 Ebbe Yndgaard: EU Enlargement - Latvia is Ready.
- 1998-14 Torben M. Andersen: Staggered Wage-Setting and Output Persistence.
- 1998-15 Henning Bunzel, Bent Jesper Christensen, Niels Haldrup, Svend Hylleberg, Viggo Høst, Peter Jensen og Allan Würtz: Udviklingslinier i Økonometrien.

CENTRE FOR NON-LINEAR MODELLING IN ECONOMICS

DEPARTMENT OF ECONOMICS - UNIVERSITY OF AARHUS - DK - 8000 AARHUS C - DENMARK

☎ +45 89 42 11 33 - TELEFAX +45 86 13 63 34

Working papers, issued by the Centre for Non-linear Modelling in Economics:

- 1996-1 Tom Engsted and Niels Haldrup: Estimating the LQAC Model with I(2) Variables.
- 1996-2 Peter Boswijk, Philip Hans Franses and Niels Haldrup: Multiple Unit Roots in Periodic Autoregression.
- 1996-3 Clive W.J. Granger and Niels Haldrup: Separation in Cointegrated Systems, Long Memory Components and Common Stochastic Trends.
- 1996-4 Morten O. Ravn and Martin Sola: A Reconsideration of the Empirical Evidence on the Asymmetric Effects of Money-Supply shocks: Positive vs. Negative or Big vs. Small?
- 1996-13 Robert F. Engle and Svend Hylleberg: Common Seasonal Features: Global Unemployment.
- 1996-14 Svend Hylleberg and Adrian R. Pagan: Seasonal Integration and the Evolving Seasonals Model.
- 1997-1 Tom Engsted, Jesus Gonzalo and Niels Haldrup: Testing for Multi-cointegration.
- 1997-7 Luca Fanelli: Estimating Multi-Equational LQAC Models with I(1) Variables: a VAR Approach.
- 1997-12 Niels Haldrup: A Review of the Econometric Analysis of I(2) Variables.
- 1997-14 Viggo Høst: Better Confidence Intervals for the Population Mean by Using Trimmed Means and the Iterated Bootstrap?
- 1997-17 N.E. Savin and Allan H. Würtz: The Effect of Nuisance Parameters on Size and Power; LM Tests in Logit Models.
- 1997-18 Tom Engsted and Niels Haldrup: Multicointegration in Stock-Flow Models.
- 1998-6 Svend Hylleberg and Rikke Willemoes Jørgensen: A Note on the Estimation of Markup Pricing in Manufacturing.
- 1998-15 Henning Bunzel, Bent Jesper Christensen, Niels Haldrup, Svend Hylleberg, Viggo Høst, Peter Jensen and Allan Würtz: Udviklingslinier i Økonometrien.